Quale probabilità?

realizzato da

Della Stella Maria Emilia, Zattoni Gianna, Zini Raffaella

docenti presso il Liceo B. Russell, Cles

a.s. 2014 – 2015

FASE 1: INTRODUZIONE ALLA PROBABILITA’ (2 ore)

AVVIO

L’attività viene avviata dall'insegnante di italiano o di matematica proponendo agli studenti un **questionario** con le seguenti finalità:
- sondare **conoscenze pregresse e credenze** degli alunni relative alla probabilità;
- stimolare **l’interesse** verso l’analisi di alcuni problemi relativi alla probabilità;
- sollecitare una **riflessione critica** sul concetto di probabilità;
- far intravedere gli **sviluppi del percorso**.

Gli alunni risponderanno individualmente e senza aiuti da parte dell'insegnante al questionario in modalità online.

Il questionario

QUESTIONI DI CASO

Domanda 1
Cosa significano per te gli aggettivi “possibile” e “probabile”? In quali circostanze vengono usati?

Domanda 2
Tiziana deve entrare in camera da letto al buio per prendersi i calzini e non vuole accendere la luce per non svegliare la sorellina. Nel cassetto del comò ci sono 5 calzini bianchi e 5 rosa riposti separati e alla rinfusa. Pesca a caso nel cassetto due calzini sperando di prenderne due dello stesso colore: questo evento è certo, impossibile o possibile?
Quanti calzini deve prendere Tiziana per essere sicura che tra quelli pescati ce ne siano almeno due dello stesso colore?

Domanda 3
Nel lancio di un dado a sei facce le ragazze di 2B hanno diverse aspettative:
- Safaa e Nicoletta sperano che esca il numero 1;
- Michela aspetta un numero dispari;
- Beatrice e Martina scommettono sulla comparsa di un numero minore di 3;
- Susanna punta sull’uscita del numero 6;
- Sara desidera l’uscita dell’1 o del 6;
- Chiara e Carlotta aspettano un numero minore di 10;

Secondo te chi ha più probabilità di vedere realizzato il proprio desiderio?
Chi ha meno probabilità di successo?
Ci sono ragazze che hanno la stessa probabilità di riuscita?
Scrivi i tuoi ragionamenti.

Nicole propone a Michela di aggiungere un altro dado affermando che lanciando due dadi è più probabile che dalla somma dei punteggi esca un numero dispari.
Anche Lorena vuole scommettere lanciando due dadi e punta anche lei come Susanna sull’uscita di un punteggio ottenuto come somma dei singoli punteggi dei due dadi pari a 6.
Preferiresti lanciare un dado o due dadi puntando sull’uscita di un punteggio dispari ?
Punteresti sull’uscita di un punteggio uguale a 6 lanciando uno o due dadi?
Esprimi le tue scelte motivandole.

Domanda 4
Laura e Mara hanno deciso di fare una gara di nuoto. Chi arriverà per prima? Non lo sappiamo, ma sappiamo che Laura si è allenata durante tutto l'anno, mentre Mara non vede la piscina da due anni. I loro compagni di classe, Lorenzo e Luca hanno deciso di fare una scommessa. Si sono accordati così: Lorenzo scommette 5 € sulla vittoria di Laura e Luca 2 € sulla vittoria di Mara.
Secondo te, senza le informazioni su Laura e Mara i nostri amici avrebbero scommesso allo stesso modo?
Se Lorenzo e Luca sono disposti a scambiarsi i ruoli, possiamo dire che la scommessa è equa?
Quale probabilità di vittoria assegneresti a Laura? e a Mara?

Domanda 5
Marco ha gettato in aria una moneta sette volte di seguito, senza che tu abbia assistito ai lanci. Tra le seguenti sequenze di risultati possibili c'è quella che ha effettivamente ottenuto:

a) TTTTCCC
b) CTTCTCC
c) TTTTTTT

Se indovini la sequenza vinci tre euro, altrimenti ne perdi uno. Su quale sequenza ti sentiresti di scommettere?
Motiva la risposta.

Domanda 6
Nel gioco del Lotto molti scommettitori puntano sui cosiddetti numeri "ritardatari", cioè sui numeri che non sono stati estratti, su una data ruota, da molte settimane. Condividi questa strategia di gioco? Giustifica la risposta.

SVILUPPO
L'analisi delle risposte date dagli alunni alle varie domande del questionario verranno riprese in diversi momenti del percorso per avviare opportuni approfondimenti sulle varie questioni sollevate dalle domande del questionario.
In questa prima fase gli insegnanti (la situazione ideale prevede la compresenza) invitano gli alunni a presentare le risposte date alle prime tre domande del questionario. Si avvieranno quindi:
- **Discussione** intorno a quanto emerso dalle risposte degli alunni alle prime tre domande.
- **Confronto** delle diverse opinioni e concezioni.
- **Individuazione** di alcuni problemi legati al concetto di probabilità.

CONCLUSIONE
I docenti propongono l'avvio di due documenti condivisi dalla classe (tramite modulo gdrive):
a) un **glossario** dei termini specifici che verranno introdotti durante il percorso;
b) una **raccolta** sintetica delle questioni emerse.

Tali documenti verranno aggiornati in diversi momenti del percorso.
L'insegnante di lettere avrà cura di controllare il glossario ed eventualmente chiarire il significato e l'etimologia dei termini che presentano più difficoltà per gli studenti.

FASE 2: L'APPROCCIO CLASSICO ALLA PROBABILITÀ (4 ore)

AVVIO

Gli insegnanti (è preferibile la compresenza) presentano una slide con la spiegazione del gioco della zara.

Il gioco della zara

zara: di origine araba (zahr, nome popolare del " dado ")

Nella forma in voga in Italia, a turno ogni giocatore gettava sul banco tre dadi, dichiarando nello stesso tempo ad alta voce un numero; chi non riusciva a indovinare con la sua dichiarazione il numero uscente (somma dei punti usciti sulle facce dei tre dadi) era considerato perdente e doveva versare come posta una quantità di monete pari al numero uscito; vinceva invece, il giocatore la cui preventiva dichiarazione era confermata dai dadi.

Gli insegnanti spiegano agli alunni che i giocatori si erano accorti che alcuni punteggi erano ovviamente più probabili di altri (ad esempio il punteggio 3 è poco probabile, perché è realizzabile solo con la combinazione 111, mentre il punteggio 10 è sicuramente più probabile perché ottenibile con molte più combinazioni). Ma quello che i giocatori trovavano essere contro il senso comune è che nell'esperienza di gioco il punteggio 10 era più frequente del punteggio 9, nonostante ciascuno dei due numeri potesse uscire in sei modi, come risultato della somma di tre numeri:

9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3
10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4

Gli insegnanti lasciano poi un po' di spazio per una riflessione sulla questione e poi propongono di esaminare la risposta fornita da Galilei in un suo manoscritto originale visionabile al link http://bibdig.museogalileo.it/Teca/Viewer?an=000000020136 "CONSIDERAZIONI DI GALILEO SUL GIOCO DELLA ZARA" utilizzando però per una lettura più agevole la traduzione "*SOPRA LE SCOPERTE DE I DADI"* visionabile al link http://bibdig.museogalileo.it/Teca/Viewer?an=000000961887 (Edizione Nazionale (E.N.) di A. Favaro, Tipografia La Barbera 1897, Firenze (1718), Vol. VIII, pag. 591-594)

SVILUPPO

La lettura, l'analisi e la comprensione testuale, lessicale, grammaticale del testo: **Considerazioni di Galileo Galilei: Sopra le scoperte de i dadi (1612)** è soprattutto a cura dell'insegnante di italiano, mentre è lasciato al docente di matematica il chiarimento degli aspetti più strettamente connessi alla sua disciplina.

Si riporta di seguito la versione integrale della traduzione del manoscritto di Galilei .

SOPRA LE SCOPERTE DE I DATI

Che nel gioco dei dadi alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è, il poter quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi,che questi, il che dipende dal potersi formare con più sorte di numeri: onde il 3. e il 18.come punti, con tre numeri comporre, cioè questi con 6.6.6. e quelli con 1.1.1. e non altrimenti, più difficili sono a scoprirsi, che v.g. il 6. o il 7., li quali in più maniere si compongono, cioè il 6. con 1.2.3.e con 2.2.2. e con 1.1.4. ed il 7. con 1.1.5., 1.2.4, 1.3.3., 2.2.3. Tuttavia ancorché il 9. e il 12. in altrettante maniere si compongano in quante il 10. e l'11. perlochè d'equal uso devriano esser reputati; si vede non di meno, che la lunga osservazione ha fatto dai giocatori stimarsi più vantaggioso il 10. e l'11. che il 9. e il 12.
E che il 9. e il 10. si formino (e quel che di questi si dice intendasi de' lor sossopri 12. e 11.) si formino dico con pari diversità di numeri, è manifesto; imperocché il 9.si compone con 1.2.6., 1.3.5., 1.4.4., 2.2.5., 2.3.4., 3.3.3. che sono sei triplicità, ed il 10.con 1.3.6., 1.4.5., 2.2.6., 2.3.5., 2.4.4., 3.3.4. e non in altri modi, che pur son sei combinazioni. Ora io per servire a chi m'ha comandato, che io debba produr ciò, che sopra tal difficoltà mi sovviene, esporrò il mio

pensiero, con isperanza, non solamente di scorre questo dubbio, ma di aprire la strada a poter puntualissimamente scorger le ragioni, per le quali tutte le particolarità del giuoco sono state con grande avvedimento e giudizio compartite ed aggiustate. E per condurmi colla maggior chiarezza che io possa la mio fine, comincio a considerare come essendo un dado, terminato da 6. facce, sopra ciascuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarsi; sei vengono ad essere le sue scoperte, e non più, l'una differente dall'altra. Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado, che pure ha altre sei facce, potremo fare 36. scoperte tra di loro differenti, poiché ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo, ed in conseguenza fare 6. scoperte diverse [per ogni faccia scoperta del primo]; onde è manifesto tali combinazioni esser sei volte 6. cioè 36. E se noi aggiugneremo il terzo dado, perché ciascuna delle sue facce, che pur son sei, può accoppiarsi con ciascuna delle 36. scoperte degli altri due dadi, averemo le scoperte di tre dadi esser 6. volte 36. cioè 216. tutte tra di loro differenti. Ma perché i punti dei tiri di tre dadi non sono se non 16., cioè 3., 4., 5. sino a 18., tra i quali si hanno a compartire le dette 216.scoperte, è necessario, che ad alcuni di essi ne tocchino molte; e se noi ritroveremo quante ne toccano per ciascheduno, averemo aperta la strada di scoprire quanto cerchiamo, e basterà fare tale investigazione dal 3. sino al 10. perché quello che converrà a uno di questi numeri, converrà ancora al suo sossopra.
Tre particolarità si debbon notare per chiara intelligenza di quel che resta:
la prima *è, che quel punto dei tre dadi, la cui composizione risulta da tre numeri eguali, non si può produrre, se non da una sola scoperta, ovvero tiro di dadi, e così il 3.non si può formare se non dalle tre facce dell'asso, ed il 6., quando si dovesse comporre con tre dui, non si farebbe se non da una sola scoperta.*
Seconda*: il punto, dai tre numeri, due dei quali sieno i medesimi, e i terzo diverso, si può produrre da tre scoperte, come v.g. il 4. che nasce dal 2 e dalli due assi, può farsi con tre cadute diverse, cioè quando il primo dado scopra 2. e il secondo e il terzo scuoprano asso; o scuoprendo il secondo dado 2., e il primo e il terzo asso; o scuoprendo il terzo 2., ed il primo e secondo asso. E così v.g. l'8. in quanto resulta da 3.3.2. può prodursi parimenti in tre modi; cioè scuoprendo il primo dado 2.e gli altri 3. per uno, o scuoprendo il secondo dado 2. ed il primo e terzo 3. o finalmente scuoprendo il terzo dado 2. ed il primo e secondo 3.*
Terza*: quel numero di punti, che si compone di tre numeri differenti, può prodursi in 6. maniere, come per esempio, l'8. mentre si compone da 1.3.4. si può fare con 6. scoperte differenti; prima, quando il primo dado faccia 1. Il secondo3.e il terzo 4.; seconda, quando il primo dado faccia pur 1. ma il secondo 4.e il terzo 3.; terza, quando il secondo dado faccia 1. e il primo 3. e il terzo 4.; quarta, facendo il secondo pur 1. e il primo 4. e il terzo 3.; quinta, quando facendo il terzo dado 1., il primo faccia 3.e il secondo 4.; sesta, quando sopra l'1. del terzo dado, il primo farà 4. e il secondo 3.*
Abbiamo dunque sin qui dichiarati questi tre fondamenti, primo, che le triplicità, cioè il numero delle scoperte dei tre dadi, che si compongono da tre numeri eguali, non si producono se non in un modo solo; secondo, che le triplicità che nascono da due numeri uguali, e dal terzo differente, si producono in tre maniere; terzo, che quelle che nascono da tre numeri tutti differenti, si formano in sei maniere.
Da questi fondamenti facilmente raccorremo in quanti modi, o vogliam dire, in quante scoperte differenti si possono formare tutti i numeri [o punti] dei tre dadi, il che per la seguente tavola facilmente si comprende, in fronte della quale sono notati i punti dei tir dal 10. in giù sino al 3. E sotto essi le triplicità differenti, dalle quali ciascuno di essi può resultare, accanto alle quali son posti i numeri, secondo i quali ciascuna triplicità si può diversificare, sotto i quali è finalmente raccolta la somma di tutti i modi possibili a produrre essi tiri, come per esempio:

10		9		8		7		6		5		4		3	
6.3.1	6	6.2.1	6	6.1.1	3	5.1.1	3	4.1.1	3	3.1.1	3	2.1.1	3	1.1.1	1
6.2.2	3	5.3.1	6	5.2.1	6	4.2.1	6	3.2.1	6	2.2.1	3		3		1
5.4.1	6	5.2.2	3	4.3.1	6	3.3.1	3	2.2.2	1		6				
5.3.2	6	4.4.1	3	4.2.2	3	3.2.2	3		10						
4.4.2	3	4.3.2	6	3.3.2	3		15								
4.3.3	3	3.3.3	1		21										
	27		25												

Nella prima casella abbiamo il punto 10. e sotto di esso 6. triplicità di numeri, con i quali egli si può comporre, che sono 6.3.1., 6.2.2., 5.4.1., 5.3.2., 4.4.2., 4.3.3. E perché la prima triplicità 6.3.1. è composta di tre numeri diversi, può (come sopra si è dichiarato) esser fatta da 6. scoperte di dadi differenti; però accanto ad essa triplicità 6.3.1. si nota 6. Ed essendo la seconda 6.2.2. composta di due numeri eguali, e di un altro diverso, non può prodursi se non in 3. differenti scoperte, però se gli nota accanto 3. La terza triplicità 5.4.1., composta di tre numeri diversi può farsi da 6.scoperte, onde si nota con il numero 6. e così dell'altre tutte. E finalmente a piè della colonnetta de' numeri delle scoperte è raccolta la somma di tutte: dove si vede, come il punto 10. Può farsi da 27. scoperte di dadi differenti ma il punto 9. [come il punto 12.] da 25
solamente, e l'8. da 21., il 7. da 15., il 6. da 10., il 5. da 6., il 4. da 3. e finalmente il 3.da 1., le quali tutte sommate insieme ascendono al numero di 108. Ed essendo altrettante le scoperte dei sossopra, cioè dei punti 11. 12.13. 14. 15. 16. 17. 18. si raccoglie la somma di tutte le scoperte possibile a farsi colle facce dei tre dadi, che sono 216. E da questa tavola potrà ognuno ch'intenda il giuoco andar puntualissimamente misurando tutti i vantaggi per minimi che sieno delle zare, degl'incontri, e di qualunque altra particolar regola, che in esso giuoco si osserva.

Osservazioni:
Il testo testimonia che la nascita della probabilità è legata alla soluzione di alcuni giochi molto diffusi fin dal Medioevo. Il gioco della zara è infatti citato anche da Dante nel canto VI del Purgatorio. Senza dare una definizione esplicita di probabilità, Galilei affronta alcuni significativi problemi ad essa relativi a partire dai quali è possibile ottenere ulteriori sviluppi. Nel testo, Galilei, oltre a dare una soluzione al problema, esamina il numero dei casi favorevoli e dei casi possibili per i valori della somma dei punteggi di tre dadi e fa riferimento, in modo intuitivo e in un esempio, alla “Legge dei Grandi Numeri” in collegamento con la “Legge Empirica del Caso”. Galilei inoltre richiama i concetti di equiprobabilità e indipendenza.
Dalla discussione relativa al testo proposto dovrebbe scaturire la nozione classica di probabilità come rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.
Si invitano gli studenti ad esaminare giochi simili a quello proposto nel testo e a cui si è già fatto riferimento nel questionario introduttivo (lancio di monete, dadi…) e a valutare in che modo è possibile definire e quindi calcolare la probabilità di un determinato evento.
La riflessione sollecitata dovrebbe permettere di osservare che la definizione di probabilità data è ben posta se e solo se gli eventi sono equiprobabili (monete e dadi non truccati).
Al fine di far comprendere il ragionamento seguito da Galilei l’insegnante utilizza un file Excel precedentemente predisposto.
Dopo che gli studenti hanno compreso la soluzione del problema proposta da Galilei, l’insegnante di italiano assegna agli alunni suddivisi in gruppi il compito di parafrasare in un linguaggio matematico moderno una parte del testo di Galilei. Una interessante analisi del testo di Galilei viene proposta nell'articolo di Mario Barra “Galileo Galilei e la Probabilità” consultabile all'indirizzo http://www.sbai.uniroma1.it/accascinamonti/ssis/linguaggiodellincertezza1/1%20TeorLimiteCentrStampa2.pdf.
Il testo *Considerazioni di Galileo Galilei: Sopra le scoperte dei dadi (1612)* potrebbe presentare alcune difficoltà di comprensione da parte degli studenti. Il testo è scritto in un italiano non di uso corrente, e poiché gli studenti non conoscono il gioco a cui si riferisce, alcune espressioni non sono deducibili dal contesto o ricavabili da conoscenze pregresse. Per questo motivo risulta indispensabile un’analisi prima di tutto lessicale. Gli studenti potranno avere a disposizione il dizionario per la consultazione durante una prima fase di lettura, oltre che chiedere all’insegnante il significato di alcuni termini che nell’italiano attuale hanno assunto una diversa sfumatura di significato (ad esempio *chiara intelligenza, triplicità, sossopri, andar puntualissimamente misurando*).
In secondo luogo la struttura dell’esposizione risulta complessa per la lunghezza delle frasi, la modalità di presentazione dei dati e la formulazione delle ipotesi. Lo studente per comprendere meglio deve operare una semplificazione e ricostruzione delle proposizioni, concentrandosi in particolar modo sui connettivi. L’insegnante guiderà questa analisi, spiegando come suddividere il testo aiutandosi con la punteggiatura e la paragrafazione originale. Sarà così sviluppata la competenza di lettura e interpretazione dei testi scritti.
Un altro tratto caratteristico del testo è la presenza di ripetizioni/ridondanza. Si farà capire che questo non è da considerarsi negativo, ma che, anzi, la ripetizione è necessaria per evitare ambiguità. Non esiste un sinonimo perfetto, perciò gli studenti saranno invitati a sottolineare le parole ripetute e noteranno che, se non fosse così, la spiegazione risulterebbe ancora più complicata. Tale riflessione sarà ripresa nella fase di produzione scritta.
Le parafrasi elaborate dai gruppi verranno messe a confronto. L'idea è quella di integrare le diverse proposte e pervenire ad un unico testo che sia ottimale sia rispetto alla chiarezza della spiegazione che alla correttezza e proprietà del linguaggio.

CONCLUSIONE
- Gli studenti integrano i documenti condivisi iniziati nella FASE 1 aggiornando:
a) il **glossario**;
b) la **raccolta** sintetica delle questioni emerse.
- Si invitano gli studenti ad iniziare la produzione di un **diario del percorso** nel quale confluisca una sintesi dei contenuti appresi.

FASE 3: DEFINIZIONE DI PROBABILITÀ CLASSICA (8 ore)

AVVIO

Lettura del testo sotto riportato, analisi e comprensione (testuale-linguistica-grammaticale…) delle sole parti del testo evidenziate a cura dell'insegnante di italiano.

Determinismo e probabilità, tratto dall'Introduzione alla "Théorie Analytique des probabilités" di Laplace.

In questo brano Laplace spiega che il calcolo delle probabilità interviene a colmare la nostra ignoranza rispetto ai processi più complessi del mondo reale.

E' opportuno precisare, dal punto di vista storico, che la definizione rigorosa della probabilità classica esplicitata nel 1812 da Pierre Simon de Laplace, nel suo Théorie analytique des probabilités, era già utilizzata in maniera implicita dagli studiosi di probabilità del XVII e XVIII secolo.

DETERMINISMO E PROBABILITA'

Tutti gli eventi, anche quelli che per la loro piccolezza sembrano non dipendere dalle grandi leggi della natura, ne sono una conseguenza altrettanto necessaria delle rivoluzioni del sole. Per l'ignoranza dei legami che li uniscono al sistema intero dell'universo, li si é fatti dipendere dalle cause finali o dal caso, secondoché si producevano e si susseguivano con regolarità, o senza ordine apparente; ma queste cause immaginarie sono state successivamente allontanate assieme ai confini delle nostre conoscenze, e scompaiono completamente di fronte alla sana filosofia che non vede in esse altro che l'espressione della nostra ignoranza delle cause vere. Gli eventi attuali hanno un legame con quelli che li precedono, il quale é fondato sul principio evidente che una cosa non può cominciare ad essere, senza una causa che la produca. Questo assioma noto col nome di principio di ragion sufficiente, si applica anche a quelle azioni considerate come indifferenti. La volontà più libera non può produrle senza un motivo determinante; difatti, se tutte le circostanze di due posizioni fossero esattamente simili, ed essa agisse nell'una e non nell'altra, la sua scelta sarebbe un effetto senza causa: essa sarebbe allora, come dice Leibniz, il caso cieco degli epicurei. L'opinione contraria é un'illusione dello spirito il quale, perdendo di vista le ragioni nascoste della scelta della volontà nelle cose indifferenti, si persuade che essa si é determinata da sé e senza motivi. Noi dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell'Universo, come l'effetto del suo stato precedente, e come la causa del seguente. Una intelligenza che, in un istante dato, conoscesse tutte le forze che animano la natura, e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se fosse così elevata da sottoporre questi dati all'analisi, racchiuderebbe nella stessa formula i moti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa, e l'avvenire come il passato sarebbe presente ai suoi occhi. Lo spirito umano offre, con la perfezione che ha saputo dare all'Astronomia, un pallido abbozzo di questa intelligenza. Le sua scoperte nella Meccanica e nella Geometria, unitamente a quella della Gravità universale, l'hanno messo in condizioni di cogliere entro le stesse espressioni analitiche, gli stati passati e futuri del sistema del mondo. Applicando lo stesso metodo ad alcuni altri oggetti delle sue conoscenze, esso é riuscito a ricondurre a leggi generali, i fenomeni osservati, e a prevedere quelli che dovevano seguire da circostanze date. Tutti i suoi sforzi nella ricerca della verità, tendono ad avvicinarlo incessantemente all'intelligenza che noi abbiamo concepito, ma dalla quale resterà sempre infinitamente lontano. Questa tendenza caratteristica della specie umana, é ciò che la rende superiore agli animali; e i suoi progressi in questo senso, distinguono le nazioni e i secoli, e costituiscono la loro vera gloria. Ricordiamoci che in altri tempi e in un'epoca non molto lontana, una pioggia o una siccità estrema, una cometa che trascinava dietro di sé una coda molto lunga, le eclissi, le aurore boreali e in genere tutti i fenomeni straordinari, erano considerati come segni della collera celeste. Si invocava il cielo per allontanare il loro influsso funesto. Non lo si pregava di interrompere il corso dei pianeti e del sole: l'osservazione avrebbe presto mostrato l'inutilità di queste preghiere. Ma dato che questi fenomeni che si manifestavano e sparivano a lunghi intervalli, sembravano contraddire l'ordine della natura, si supponeva che il cielo li facesse nascere e li modificasse a suo piacimento, per punire i crimini terrestri. Così la lunga coda della cometa del 1456 sparse il terrore in Europa, che era già prostrata dai rapidi successi dei Turchi, i quali avevano appena rovesciato il BassoImpero. Questo astro, dopo quattro rivoluzioni, ha suscitato tra noi un interesse ben diverso. La conoscenza delle leggi del sistema del mondo, acquisita nel frattempo, aveva dissipato le paure prodotte dalla ignoranza dei veri rapporti tra l'uomo e l'universo; e Halley, che aveva riconosciuto l'identità fra quella cometa e quelle degli anni 1531, 1607, 1682, annunciò il suo ritorno per la fine del 1758 o l'inizio del 1759.

Il mondo degli scienziati attese con impazienza questo ritorno, che doveva confermare una delle più grandi scoperte scientifiche mai fatte, e avverare la profezia di Seneca, quando disse, parlando della rivoluzione di quegli astri che provengono da enormi distanze: <verrà il giorno in cui, attraverso uno studio continuo, di molti secoli, le cose attualmente nascoste si manifesteranno con evidenza; e i posteri si stupiranno del fatto che verità tanto chiare ci siano sfuggite>. Clairaut iniziò allora a sottoporre all'analisi le perturbazioni subite dalla cometa per effetto dei due maggiori pianeti, Giove e Saturno; dopo immensi calcoli egli stabilì il suo prossimo passaggio al perielio, verso l'inizio dell'aprile 1759, il che fu presto confermato dall'osservazione. La regolarità che l'Astronomia ci mostra nel moto delle comete, ha luogo, senza dubbio, in tutti i fenomeni. La curva descritta da una semplice molecola d'aria o di vapori, é determinata in modo altrettanto certo delle orbite planetarie: non vi é altra differenza tra esse che quella dovuta alla nostra ignoranza.

La probabilità é relativa in parte a questa ignoranza, in parte alla nostra conoscenza. Noi sappiamo che su tre o più eventi, uno solo deve prodursi; ma nulla porta a credere che si produrrà uno di essi anziché gli altri. In questo stato di indecisione, é impossibile pronunciarsi con certezza sul loro verificarsi. Tuttavia, é probabile che uno di questi eventi, scelto arbitrariamente, non si produca; perché si danno molti casi egualmente possibili che escludono la sua esistenza, mentre solo uno la favorisce. La teoria del caso consiste nel ridurre tutti gli eventi dello stesso tipo, ad un certo numero di casi egualmente possibili, cioé, tali che si abbia una eguale indecisione sulla loro esistenza; e nel determinare il numero dei casi favorevoli all'evento di cui si cerca la probabilità.

Il rapporto di questo numero con quello di tutti i casi possibili, rappresenta la misura di questa probabilità che non é altro che una frazione di cui il numeratore é il numero dei casi favorevoli e il denominatore é il numero di tutti i casi possibili.

La precedente nozione di probabilità presuppone che, facendo crescere nello stesso rapporto, il numero dei casi favorevoli e quello di tutti i casi possibili, la probabilità resta la stessa. Per convincersene, si considerino due urne A e B, di cui la prima contenga quattro palle bianche e due nere, e la seconda solo due palle bianche e una nera. Possiamo immaginare le due palle nere della prima urna attaccate con un filo che si rompe nel momento in cui si afferra una di esse per estrarla, e le quattro palle bianche che formino due sistemi dello stesso tipo. Tutti i casi in cui si afferrerà una delle palle del sistema nero, porteranno ad una palla nera.

Se si suppone che i fili che uniscono le palle non si rompano, é chiaro che il numero dei casi possibili non cambierà, e nemmeno quello dei casi favorevoli all'estrazione delle palle nere; soltanto, si estrarranno dall'urna due palle per volta; la probabilità di estrarre una palla nera dall'urna sarà dunque la stessa di prima. Ma allora si ha evidentemente il caso dell'urna B, con la sola differenza che le tre palle di quest'urna sono sostituite da tre sistemi di due palle indissolubilmente unite. Quando tutti i casi sono favorevoli ad un evento, la sua probabilità diviene certezza, e la sua espressione risulta uguale all'unità. Da questo punto di vista la certezza e la probabilità sono confrontabili, sebbene vi sia una differenza essenzialefra questi due stati delo spirito, quando una verità é per lui rigorosamente dimostrata, o quando si scorge ancora una piccola fonte d'errore.

Nelle cose soltanto verosimili, la differenza dei dati che ogni uomo ha su di esse é una delle cause principali della diversità di opinioni relative ai medesimi oggetti. Supponiamo, ad esempio, che si abbiano tre urne A, B, C, di cui una contenga solo una palla nera, mentre le altre due solo palle bianche: si deve estrarre una palla dall'urna C e si chiede la probabilità che questa palla sia nera. Se si ignora quale delle tre urne contenga solo palle nere, in modo che non si abbia alcuna ragione di credere che essa sia A o B piuttosto che C, queste tre ipotesi sembreranno ugualmente possibili, e poiché una palla nera non può essere estratta che nella prima ipotesi, la probabilità di estrarle é uguale ad un terzo. Se é noto che l'urna A contiene solo palle bianche, l'indecisione verte allora solo sulle urne B e C, e la probabilità che la palla estratta dall'urna C sia nera é un mezzo. Infine, questa probabilità diviene certezza se si é sicuri che le urne A e B contengono solo palle bianche.

Nello stesso modo, il medesimo fatto esposto dinnanzi ad una folta assemblea, viene accettato a diversi livelli, secondo le profondità delle conoscenze degli ascoltatori. Se colui che lo espone ne é intimamente persuaso e se, per la sua posizione e per il suo carattere ispira una grande fiducia, la sua esposizione, per quanto straordinaria, avrà, per gli ascoltatori privi di lumi, lo stesso grado di verisimiglianza di un fatto ordinario esposto dalla stessa persona, e gli concederanno una fiducia completa. Tuttavia, se qualcuno fra loro sa che il medesimo fatto non é accettato da altri uomini ugualmente rispettabili, sarà in dubbio, e il fatto sarà giudicato falso dagli ascoltatori illuminati, che lo troveranno contraddittorio sia con dei fatti completamente accertati, sia con le leggi immutabili della natura.

La diffusione di quegli errori che, in tempi d'ignoranza, hanno coperto la faccia del mondo, é dovuta all'influsso dell'opinione di coloro che la moltitudine considera i più istruiti ed ai quali usa concedere la propria fiducia sulle più importanti questioni della vita. La Magia e l'Astrologia ce ne offrono due grandi esempi. Questi errori inculcati fin dall'infanzia, accolti senza riflessione, e basati soltanto sulla credenza universale, si sono mantenuti durante un lunghissimo periodo; fino a che, finalmente, il progresso delle scienze li ha distrutti nello spirito degli uomini illuminati, la cui opinione in seguito li ha fatti sparire nello

stesso popolo, attraverso il potere dell'imitazione e dell'abitudine, che li aveva così generalmente diffusi. Questo potere, che é la più importante molla del mondo morale, stabilisce e conserva in una intera nazione, delle idee completamente contrarie a quelle che egli conserva altrove con la stessa forza.
Quale indulgenza dobbiamo dunque avere per le opinioni diverse dalle nostre, poiché questa differenza spesso non dipende che da punti di vista differenti in cui le circostanze ci hanno posti!
Illuminiamo la mente di coloro che non giudichiamo sufficientemente istruiti, ma prima esaminiamo severamente le nostre opinioni e valutiamo con imparzialità le loro probabilità rispettive. La diversità di opinioni dipende anche dal modo in cui si determina l'influenza dei dati noti. La teoria delle probabilità attiene a considerazioni così delicate che non é sorprendente che, con gli stessi dati, due persone trovino risultati diversi, soprattutto nelle questioni molto complesse.

Il brano di Laplace può risultare non facile agli studenti per problematiche di diversa natura. Si tratta di una traduzione, quindi il linguaggio è attuale e apparentemente più semplice. A differenza del primo testo, espositivo e centrato fin dal principio sulla spiegazione del gioco, questo comincia con alcune riflessioni filosofiche, per poi narrare una storia della probabilità. Questa introduzione serve a chiarire e delineare l'oggetto dell'esposizione ma non è funzionale alla spiegazione vera e propria. Gli studenti devono così capire quando e in che modo avviene il passaggio tra la parte narrativa e quella espositiva, suddividendo il testo in diverse sequenze, ciascuna con la sua specifica funzione. Potranno ipotizzare il perché di una simile strutturazione e riflettere sul fatto che oggi si preferisce, nei libri di scienze e matematica, evitare di appesantire il discorso con lunghe introduzioni aneddotiche o storiche.

SVILUPPO

Terminata la lettura e l'analisi del testo di Laplace, l'insegnante di matematica prosegue con lo sviluppo dell'attività.
Gli studenti **discutono** intorno al testo: dal confronto dovrebbero emergere la **definizione classica di probabilità** come rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, i concetti di **evento, evento impossibile, evento certo, eventi incompatibili ed evento contrario.** A questo punto sarà possibile costruire insieme agli studenti, con l'uso degli strumenti della teoria degli insiemi, una definizione matematicamente rigorosa di probabilità:

La probabilità p(E) di un evento E è un numero reale che soddisfa i seguenti assiomi:
A_1) probabilità dell'evento impossibile: $p(\emptyset) = 0$
A_2) probabilità dell'evento certo: $p(\Omega) = 1$
A_3) per ogni evento A: $0 \leq p(A) \leq 1$
A_4) legge della somma: se $A \cap B = \emptyset$ (eventi incompatibili), $p(A \cap B) = p(A) + p(B)$

Poi a partire dagli assiomi si deducono le seguenti proprietà:
P_1) probabilità dell'evento contrario: $p(\mathcal{C}A)= 1- p(A)$
P_2) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

L'insegnante propone una selezione dal libro di testo (Sasso L. , Nuova Matematica a colori, vol. 2, Petrini) di esercizi di applicazione della definizione classica di probabilità, esercizi di utilizzo di diagrammi ad albero, tabelle a doppia entrata e principio fondamentale del calcolo combinatorio, e qualche problema sulle probabilità dell'unione, dell'intersezione e dell'evento contrario.

CONCLUSIONE

Si invitano gli studenti ad arricchire i documenti condivisi ed individuali iniziati nelle FASI precedenti:
a) il **glossario**;
b) la **raccolta** sintetica delle questioni emerse;
c) il **diario del percorso.**
Più precisamente, si suggerisce agli studenti di arricchire il diario del percorso aggiornandolo con una riflessione scritta relativa alla definizione classica di probabilità.

FASE 4: CRITICA ALLA DEFINIZIONE CLASSICA E APPROCCIO FREQUENTISTA ALLA PROBABILITÀ
(2 ore)

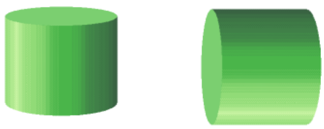
AVVIO

L'insegnante di matematica, per iniziare l'attività, rivolge all'intera classe le domande che seguono:

Domanda n°1
Se lanci una puntina da disegno, essa può cadere con la punta rivolta verso l'alto o verso il basso .
Quali sono le probabilità dei due eventi?

Mentre formula la domanda l'insegnante tiene in mano alcune puntine, che poi verranno appoggiate sulla cattedra. Si auspica di stimolare in tal modo il loro uso, in modo che gli studenti possano sperimentare direttamente quanto richiesto dall'insegnante.

Domanda n°2
Hai un cilindro equilatero, cioè con l'altezza uguale al diametro di base. Se lo lanci in aria, esso può cadere su una delle due basi oppure sulla superficie laterale.
Quale dei due eventi è più probabile?



Gli alunni suddivisi in gruppi propongono, in un testo scritto, la loro strategia risolutiva per entrambe le domande, motivando le scelte effettuate e la risposta. L'insegnante osserverà intanto l'interazione di gruppo aiutandosi con una griglia appositamente predisposta.

SVILUPPO

I vari gruppi presentano a turno le loro strategie risolutive.
Dalla lettura e dall'analisi delle riflessioni degli studenti dovrebbe emergere che:
a) non è possibile applicare la definizione classica di probabilità, poiché la puntina non è simmetrica e uno dei due eventi può essere più probabile dell'altro;
b) lanciando la puntina "molte" volte si potrebbe assumere come valore della probabilità la frequenza relativa;
c) nel caso del cilindro gli alunni potrebbe ipotizzare che la probabilità dei due eventi sia direttamente proporzionale alla somma delle superfici delle due basi e alla superficie laterale. Calcolando che la superficie laterale è il doppio della superficie delle due basi potrebbero stimare le due probabilità $\frac{2}{3}$ (evento: "cade sulla superficie laterale") e $\frac{1}{3}$ (evento: "cade su una base").
L'insegnante avrà cura di procurare un modellino fisico del cilindro equilatero (in un materiale che ne permetta il lancio), ma in questa fase non lo farà vedere agli studenti, lasciando che questi tentino un approccio solamente geometrico.

Eventuali osservazioni da far emergere nel caso in cui gli alunni non le presentino, utilizzando opportune domande stimolo, sono le seguenti:
a) l'esperimento deve essere ripetibile in linea teorica e regolare nello svolgimento (non è ad esempio applicabile in una scommessa su una partita di calcio);
b) eseguendo due serie di lanci si troverà un valore diverso della frequenza relativa e quindi un diverso valore della probabilità; si è persa la precisione formale della definizione classica, ma rimane pur sempre un metodo di misurazione della probabilità utile ed efficace, laddove non sia applicabile il metodo classico (ad esempio, i diversi gruppi otterranno valori della probabilità diversi e da qui si potrà avviare la discussione);
c) le simulazioni e gli esperimenti di fenomeni che dipendono dal caso sono fondamentali per comprendere "cosa succede nella pratica", ma non costituiscono una dimostrazione e i soli esiti delle prove di un esperimento (che sono necessariamente in numero finito, per quanto "grande") non forniscono certezze su ciò che succede definitivamente;

d) talvolta non è necessario effettuare delle prove ripetute; disponendo di dati statistici, questi possono essere considerati delle "prove ripetute"; (ad esempio si possono utilizzare gli strumenti di gapminder http://www.gapminder.org/)
e) presenza di un circolo vizioso: la definizione della probabilità basata su eventi equiprobabili presuppone la definizione di probabilità stessa.
f) è corretto lanciare il cilindro molte volte calcolare la frequenza relativa dei due eventi e assumerle come valore della loro probabilità.

La lettura e l'analisi delle riflessioni degli studenti dovrebbero portare a considerare la **frequenza relativa** come definizione di probabilità. La discussione guidata dal docente porterà quindi alla **definizione a posteriori o frequentista di probabilità.**

PROBABILITÀ FREQUENTISTA
Dato un evento E relativo all'esito di un esperimento che può essere ripetuto sempre nelle stesse condizioni, possiamo definire come probabilità di E il valore a cui tende la frequenza relativa registrata in un certo numero di prove quando questo numero viene fatto crescere indefinitamente.

Durante la discussione si osserverà che non si possono effettuare infinite prove e quindi la definizione non è concretamente applicabile. Inoltre assumendo di calcolare la probabilità in modo approssimato ci si chiederà se è possibile determinare il minimo numero di prove da effettuare per ottenere una "buona" approssimazione della probabilità.

La discussione dovrebbe portare alla conclusione che sia necessario fissare **arbitrariamente il numero n di prove** da effettuare e, indicato con f il numero dei successi relativi all'evento E, definire come probabilità dell'evento E, la sua frequenza relativa P(E)= f/n.

A questo punto si verifica che anche questa definizione di probabilità soddisfa gli assiomi A_1 - A_4 e le proprietà P_1 e P_2 formulate nella fase precedente nell'ambito della probabilità classica: è possibile, quindi usarle per approcciare problemi da questo nuovo punto di vista.

Si assegna per casa il compito di ricercare nel testo di Galileo ***Sopra le scoperte dei dadi*** il riferimento da lui fatto alla concezione frequentista di probabilità.

CONCLUSIONE

Si invitano gli studenti ad arricchire i documenti condivisi ed individuali iniziati nelle fasi precedenti:

a) il **glossario**;
b) la **raccolta** sintetica delle questioni emerse;
c) il **diario del percorso.**

Più precisamente, si suggerisce agli studenti di arricchire il diario del percorso aggiornandolo con una riflessione scritta dedicata alla critica della definizione classica e alla nuova definizione di probabilità.

FASE 5: COLLEGAMENTO TRA LE DEFINIZIONI CLASSICA E FREQUENTISTA E LEGGE DEI GRANDI NUMERI (3 ore)

AVVIO

L'insegnante di matematica compila insieme agli alunni la seguente tabella proiettandola sulla lavagna interattiva e utilizzando diverse modalità.
La prima riga si compila eseguendo manualmente 10 lanci della moneta, la seconda utilizzando più monete (dello stesso tipo) coinvolgendo gli alunni in modo da eseguire velocemente i 100 lanci, la terza utilizzando una simulazione con Excel (il file è precedentemente predisposto dal docente che ne spiega il funzionamento alla classe).

Numero lanci	**Frequenza assoluta evento " testa"**	**Frequenza relativa evento " testa"**	**Frequenza percentuale evento " testa"**
10			
100			
1000			

SVILUPPO

Una volta completata la tabella, si avvia una discussione sull'esperimento dalla quale dovrebbero emergere le seguenti osservazioni:

a) la frequenza relativa di un evento tende a stabilizzarsi all'aumentare del numero delle prove (legge empirica del caso);
b) all'aumentare del numero delle prove fatte il valore della frequenza tende al valore teorico della probabilita';
c) esiste una relazione tra la definizione classica di probabilità e la definizione frequentista.

Si possono effettuare delle simulazioni al computer costruendo il grafico della frequenza relativa in funzione del numero dei lanci di una moneta.
L'obiettivo è quello di arrivare alla formulazione dell'enunciato della legge dei grandi numeri , del suo significato e al suo corretto uso.
Segue l'enunciato presente sul libro di testo adottato (Sasso L. , Nuova Matematica a colori, vol. 2, Petrini), che verrà letto in classe.

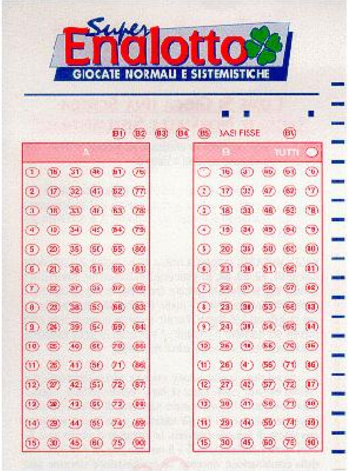
Legge dei grandi numeri
Supponiamo che a un dato evento sia attribuibile una probabilità sia secondo la definizione classica, sia secondo quella frequentista. Allora in una serie di prove ripetute, l'evento si manifesta con una frequenza relativa che tende, al crescere del numero delle prove, a coincidere con il valore teorico della sua probabilità.

Si osserva che tale legge è anche detta teorema di Bernoulli, in quanto la sua prima formulazione è dovuta a Jakob Bernoulli (1654-1705).
Con la guida del docente si dovrebbe osservare che il teorema getta un ponte tra la definizione classica di probabilità e la definizione frequentista.

Proponendo l'esempio del lancio di una moneta, il docente fa osservare che il fatto che sia uscito testa per 6 volte di seguito, non rende più probabile che nel lancio successivo esca croce: le probabilità degli eventi "esce testa" o "esce croce" è esattamente la stessa.
L'insegnate propone la seguente attività per rafforzare l'osservazione fatta sui lanci successivi di una moneta.
Si invitano gli alunni alla lettura di due brevi testi (spiegazione di come si gioca al Superenalotto e notizie dal web sui numeri ritardatari) e allo svolgimento di un esercizio (simulazione della giocata di due combinazioni al Superenalotto con motivazioni delle scelte) in modo da proporre l'analoga situazione del giocatore del lotto che, basando il proprio gioco sull'analisi dei ritardi, punta su alcuni numeri piuttosto che su altri, convinto di avere maggiori probabilità di successo (in qualche modo ritiene che le palline dell'urna abbiano memoria dell'ultima volta in cui sono uscite!).
La spiegazione di come si gioca al SuperEnalotto è presa dal sito http://www.superenalotto.com/.

Come si gioca al SuperEnalotto

Giocare al SuperEnalotto è semplice: basta scegliere sulla schedina di gioco un **minimo di due combinazioni di 6 numeri ciascuna compresi tra 1 e 90**. Il regolamento, infatti, stabilisce che la giocata minima non possa essere inferiore a due combinazioni di gioco. Il costo di una giocata minima è di 1 € avendo ciascuna combinazione un costo di 0,50 centesimi di euro.



NEWS SuperEnalotto

Estrazioni SuperEnalotto oggi, sabato 4 ottobre 2014: numeri ritardatari.
Continua ad essere priva di numeri con ritardi maggiori ai 100 giorni la graduatoria riguardante i numeri estratti meno recentemente nel gioco del SuperEnalotto; l'81, il 35 ed il 21 occupano infatti virtualmente i primi tre gradini del podio con delle mancanze rispettive di 98, 95 e 93 turni. E' invece il numero 1 il più estratto dal 1997 ad oggi. Ultimi posti occupati ancora dai numeri 59 e 60 con delle frequenze di 122 e 121 volte.

Il montepremi **SuperEnalotto di sabato 4 ottobre 2014 è di 36.500.000 €**

Dopo la lettura delle News l'insegnante invita gli alunni a simulare la giocata di una schedina del Superenalotto scegliendo due combinazioni.

E ora si gioca!

Fai la tua giocata, e **motiva le tue scelte**.
PRIMA COMBINAZIONE

SECONDA COMBINAZIONE

Dopo aver raccolto le giocate degli alunni e aver condiviso le motivazioni l'insegnate rende noto agli studenti l'esito dell'estrazione del Superenalotto di **sabato 4 ottobre 2014**.

Come è andata a finire? Estrazioni del SuperEnalotto 4 ottobre 2014

Dettagli estrazione SuperEnalotto del 4/10/2014

La **119ª** estrazione del SuperEnalotto del corrente anno ha avuto luogo sabato 4 ottobre alle ore 20,00.
I numeri estratti sono stati i seguenti:

Estrazione del 04/10/2014, concorso n. 119 /2014

2 6 11 62 70 71 17 58

Jolly: 17 Superstar: 58

Si osserva che nessun numero estratto è tra quelli ritardatari!
Si propone quindi la lettura della seguente tabella e si fa osservare che vale la legge dei grandi numeri (testi ed immagini estratte da http://www.superenalotto.com/).

Statistiche SuperEnalotto

Questa pagina presenta una serie di tavole statistiche relative alle estrazioni del SuperEnalotto. Le statistiche presentate abbracciano una casistica abbastanza ampia, cominciando con la frequenza di estrazione di singoli numeri, continuando con i più comuni numeri del SuperEnalotto, e i numeri che più hanno ritardato a uscire, fino alle più comuni coppie e triple di numeri.
I dati sono elaborati su un totale di **2261** estrazioni presenti in archivio, a partire **dalla prima estrazione del 3 dicembre del 1997** e aggiornati all'ultima estrazione di **lunedì 3 novembre 2014** .

Frequenza di estrazione nella sestina del SuperEnalotto

La tabella seguente mostra la frequenza con cui i numeri sono stati estratti nella sestina del SuperEnalotto.

Tavola dati con la frequenza di tutti i numeri della sestina SuperEnalotto

1 = 178	16 = 148	31 = 141	46 = 134	61 = 159	76 = 147
2 = 134	17 = 150	32 = 152	47 = 150	62 = 170	77 = 167
3 = 158	18 = 127	33 = 150	48 = 145	63 = 161	78 = 147
4 = 151	19 = 160	34 = 140	49 = 172	64 = 152	79 = 166
5 = 137	20 = 147	35 = 150	50 = 131	65 = 149	80 = 153
6 = 166	21 = 150	36 = 137	51 = 162	66 = 154	81 = 167
7 = 133	22 = 145	37 = 153	52 = 156	67 = 147	82 = 169
8 = 156	23 = 136	38 = 153	53 = 147	68 = 150	83 = 165
9 = 126	24 = 138	39 = 161	54 = 159	69 = 152	84 = 155
10 = 138	25 = 149	40 = 149	55 = 171	70 = 163	85 = 173
11 = 154	26 = 147	41 = 153	56 = 156	71 = 154	86 = 164
12 = 155	27 = 141	42 = 145	57 = 150	72 = 151	87 = 162
13 = 144	28 = 129	43 = 157	58 = 135	73 = 140	88 = 173
14 = 148	29 = 135	44 = 137	59 = 123	74 = 158	89 = 145
15 = 143	30 = 142	45 = 156	60 = 121	75 = 167	90 = 175

Il docente sottolinea la necessità di considerare in modo corretto la legge dei grandi numeri: essa stabilisce il comportamento asintotico della frequenza relativa e non dice nulla sulla possibilità di successo di una singola prova condizionata a quelle precedenti.

Le ultime attività proposte dovrebbero aver dato agli alunni gli strumenti per rivedere criticamente le risposte date nel questionario iniziale alle domande n° 5 e n° 6 .

CONCLUSIONE

Questa fase si conclude con un confronto tra le due definizioni di probabilità trattate. In sintesi si dovrebbe pervenire alle seguenti osservazioni:
1) entrambe le definizioni si fondano su due ipotesi molto restrittive: **l'equiprobabilità** degli eventi elementari, per la probabilità classica, e la **ripetibilità** indefinita di un certo esperimento nelle stesse condizioni per la probabilità frequentista;
2) entrambe le definizioni conducono ad una probabilità che soddisfa gli assiomi A_1 - A_4 e le proprietà P_1 e P_2 ;
3) la definizione classica, nei casi in cui è applicabile, permette di calcolare la probabilità di un evento, mentre la definizione frequentista consente di calcolare solo un'approssimazione della probabilità, senza stimare l'errore commesso;
4) la definizione frequentista appare come più generale poiché sembra applicabile a tutti i casi a cui è applicabile la definizione classica, mentre non è vero il viceversa.

Come per le altre fasi, si invitano gli studenti ad arricchire i documenti condivisi ed individuali iniziati precedentemente:
a) il **glossario**;
b) la **raccolta** sintetica delle questioni emerse;
c) il **diario del percorso.**
Più precisamente, si suggerisce agli studenti di arricchire il diario del percorso aggiornandolo con il confronto tra le due definizioni di probabilità, con l'enunciato e il significato della legge dei grandi numeri.
Le fasi 4 e 5 saranno curate soprattutto dall'insegnante di matematica, ma la riflessione sulla formulazione di una definizione corretta di probabilità e la lettura di alcuni esempi saranno preludio alla produzione scritta da parte degli studenti. In particolar modo si porrà l'attenzione sull'uso dei connettivi logici e sulla formulazione semplice e chiara della frase.

FASE 6: APPROCCIO SOGGETTIVO ALLA PROBABILITÀ (3 ore)

AVVIO

L'insegnante di matematica propone agli alunni l'immagine che segue e chiede in quale modo sia stata calcolata la probabilità di pioggia.

Dalla risposte emergerà che né la probabilità frequentista né quella classica si prestano ad essere utilizzate validamente in questo contesto. Si osserverà che esistono eventi per i quali non sono applicabili le definizioni precedenti, eventi per i quali non è possibile intuire a-priori la probabilità e non è possibile calcolare neppure la frequenza, trattandosi di eventi unici (esempi: partite, gare, …)

SVILUPPO

Al fine di introdurre la definizione soggettiva di probabilità, l'insegnante di italiano proporrà la lettura del testo di de Finetti tratta da Bruno de Finetti, Enciclopedia Einaudi, Voce: "Probabilità"

RIFLESSIONE DI DE FINETTI

Probabilità: chi è costei?
Prima di rispondere a tale domanda è certamente opportuno chiedersi: ma davvero "esiste" la probabilità? e cosa mai sarebbe? Io risponderei di no, che non esiste. Qualcuno, cui diedi questa risposta (ribadita, col motto in tutte maiuscole – PROBABILITY DOES NOT EXIST- nella prefazione all'inglese di Teoria delle probabilità [1970]), mi chiese ironicamente perché mai, allora, me ne occupo.
Mah! Potrei anche dire, viceversa e senza contraddizione, che la probabilità regna ovunque, che è, o almeno dovrebbe essere, la nostra 'guida nel pensare e nell'agire', e che perciò mi interessa. Soltanto, mi sembra improprio, e perciò mi urta, vederla concretizzata in un sostantivo, 'probabilità', mentre riterrei meglio accettabile e più appropriato che si usasse soltanto l'aggettivo, ' probabile', o, meglio ancora, soltanto l'avverbio, ' probabilmente'.
Dire che la probabilità di una certa asserzione vale 40 per cento appare- purtroppo!- come espressione concreta di una verità apodittica. Non pretendo né desidero che tale modo di esprimersi vada bandito, ma certo è che l'asserzione apparirebbe assai più appropriatamente formulata se la si ammorbidisse dicendo, invece, che quel fatto lo si giudica ' probabile al 40 per cento', o, meglio ancora (a parte che suona male) , che ci si attende ' al 40 per cento-probabilmente' che sia o che risulti vero.
Il guaio è che il realismo (come accuratamente osservò Jeffreys) ha il vantaggio che il linguaggio è stato creato da realisti, e per di più da realisti molto primitivi', ed è perciò che 'noi abbiamo larghissime possibilità di descrivere le

proprietà attribuite agli oggetti, ma scarsissime di descrivere quelle direttamente conosciute come sensazioni' [1939,p.394].
Da ciò la mania (che forse per altri è invece indizio di saggezza, serietà, accuratezza) di assolutizzare, di concretizzare, di oggettivare perfino quelle che sono soltanto proprietà dei nostri atteggiamenti soggettivi. Non altrimenti si spiegherebbe lo sforzo di fare della Probabilità qualcosa di nobler than it is (sempre parole di Jeffreys), nacondendone la natura soggettiva e gabellandola per oggettiva. Secondo la spiritosa fantasia di Hans Freudenthal si tratterebbe di uno strano pudore per impedire di farci vedere la Probabilità ' come Dio l'ha fatta': occorre una 'foglia di fico', e spesso la si riveste tutta di foglie di fico rendendola addirittura invisibile o irriconoscibile.

Il testo di de Finetti non sembra, nella struttura e nelle espressioni utilizzate, essere un testo scientifico tradizionale. La presenza di numerose esclamazioni e domande, l'utilizzo della punteggiatura, gli enunciati tra parentesi che servono per esprimere un'opinione personale e i termini tra virgolette lo avvicinano piuttosto ad un testo elastico. L'autore riflette fra sè, come in un monologo interiore, per poi arrivare ad una sintesi finale.
Si farà notare agli studenti che, infatti, anche quanto si pensa e si scrive di matematica lo si fa tramite il linguaggio "naturale" e che quindi, prima di arrivare a delle formulazioni precise e, per così dire, matematiche, esiste un processo mentale che avviene attraverso la propria lingua parlata. Questa riflessione ci pare particolarmente importante per rendere consapevoli gli studenti dell'importanza di utilizzare una buona lingua anche per discutere di argomenti che non riguardano strettamente la disciplina dell'italiano, nell'ottica di sviluppare le competenze linguistiche in tutte le materie che si studiano a scuola.

Obiettivo dell'insegnante di matematica sarà quello di giungere alla definizione di probabilità soggettiva.
Al fine di introdurre e favorire la comprensione della definizione verrà proposta la seguente situazione di apprendimento che usa il concetto intuitivo di scommessa.

QUANTO SCOMMETTI?

Contesto: scommessa tra due bambini delle elementari.
Gabriele propone a Luca la seguente scommessa: "Lanciamo un dado: se esce 6 io ti do un euro; se non esce 6 tu dai un euro a me!" Luca ci sta.
L'insegnante chiede gli alunni cosa spinge Luca ad accettare la scommessa. Dalle risposte emergerà che evidentemente Luca ritiene i due eventi equiprobabili.
Gabriele propone la stessa scommessa a Raffaele; ma quest'ultimo non la accetta e ne propone un'altra. "Lanciamo un dado: se esce 6 io ti do cinque euro; se non esce 6 tu me ne dai uno!"

L'insegnante chiede agli alunni cosa ha spinto Raffaele a non accettare la prima scommessa e a proporne la versione modificata.
Con la guida del docente si arriverà a formalizzare una definizione di probabilità soggettiva, effettuando delle opportune osservazioni:

1. dovendo scommettere pro o contro il 6, si è d'accordo che conviene puntare contro.
2. Se chi gioca sul 6 puntasse cinque euro e chi contro puntasse cinquanta il problema si rovescerebbe e converrebbe puntare sul 6.
3. In entrambi i casi le scommesse hanno un verso privilegiato. Mentre nel primo caso non è conveniente puntare 1 euro sul 6, nel secondo invece lo è.
4. La scommessa proposta da Raffaele risulta equa, nel senso che lascia il giocatore in dubbio su cosa puntare.
5. La definizione di probabilità soggettiva viene stimata in una situazione di equità.

Definizione soggettiva di probabilità
La probabilità soggettiva p di un evento E è il rapporto fra il prezzo P che un individuo coerente giudica equo pagare e la somma S che ha diritto di avere in cambio se l'evento si verifica, perdendo invece la somma P se l'evento non si verifica. In simboli: $p(E) = P / S$

Osservazioni

1. La puntata massima P che si è disposti a scommettere per ricevere una somma S se l'evento E si verifica e niente se non si verifica è proporzionale a quanto si crede che l'evento possa accadere e all'importo che si può vincere, ossia $P = p(E) \cdot S$.
2. Se si ritiene che l'evento sia impossibile non si è disposti a puntare niente. Se si è assolutamente sicuri si arriva a puntare S.
3. Questa relazione potrebbe essere usata per valutare la probabilità se ci si convince che P non rappresenta soltanto la quota massima da pagare, bensì quella *giusta*. Infatti se fosse possibile giocare una puntata P' inferiore ad P il gioco sarebbe conveniente, se invece P' fosse superiore a P la scommessa sarebbe inaccettabile, a meno di non invertirne il verso.
4. La puntata P rappresenta quindi la puntata giusta che lascia il giocatore in dubbio in quale direzione giocare. Una scommessa di questo tipo è chiamata *equa* o *coerente*. Essa può essere usata per valutare p(E).
5. *La scommessa di una puntata P per vincere S se l'evento E si verifica e perdere P nel caso contrario, tale che essa risulti accettabile da una persona razionale in entrambe le direzioni, implica la valutazione di probabilità $p(E)= P/S$.*
6. La definizione $p(E)= P/S$ impone dei vincoli su p(E)**.** Siccome nessuna persona razionale è disposto a scommettere $P>S$ o ad accettare una scommessa di $P<0$ ne segue che $0 \leq p(A) \leq 1$**.**

Note sull'uso del termine “soggettivo".
È opportuno fare alcune precisazioni sull'uso di tale termine nell'ambito della teoria della probabilità.

- “soggettivo" sta ad indicare che la valutazione di probabilità dipende dallo stato di informazione dell'individuo (soggetto) che la esegue.
- “soggettivo" non significa arbitrario: il ruolo normativo della scommessa coerente obbliga a tener conto di tutte le informazioni a disposizione.

Nota sul termine “coerente”.
La coerenza richiede che chi fissa le quote, palesando così il suo grado di credenza, sia poi pronto ad accettare una scommessa con quelle quote sia sul verificarsi dell'evento che sul verificarsi del suo opposto.

Note sull'ambito di applicazione della probabilità soggettiva.
L'utilizzo della concezione di probabilità soggettiva è indispensabile in tutte quelle situazioni in cui i fenomeni (ricerca e sviluppo, investimenti, progetti, innovazione, cambiamento organizzativo e strategico) richiedono decisioni uniche e difficilmente confrontabili con la storia passata. In questi casi la valutazione soggettiva degli esperti e la stima del grado di probabilità di successo (o rischio d'insuccesso) è indispensabile per quantificare il fenomeno.
Nell'ambito delle tecniche di gestione aziendale, un'azienda che voglia organizzare la produzione di un nuovo prodotto da immettere sul mercato, deve valutare la probabilità che venga acquistato analizzando le condizioni del mercato. Sulla base delle conoscenze acquisite e della fiducia nella bontà del prodotto stabilirà le quantità da produrre.

CONCLUSIONE

Si invitano gli studenti ad arricchire i documenti condivisi ed individuali iniziati nelle FASI precedenti:
(a) il **glossario**;
(b) la **raccolta** sintetica delle questioni emerse;
(c) il **diario del percorso.**
Più precisamente, si suggerisce agli studenti di arricchire il diario del percorso aggiornandolo con una riflessione scritta dedicata alla definizione di probabilità soggettiva.

ACCERTAMENTO DEGLI APPRENDIMENTI

Titolo della Verifica: PROBABILITA'

Presentazione della Verifica

La prova è composta da quesiti e problemi finalizzati alla verifica delle seguenti abilità e competenze.

- Domanda 1: produrre la parafrasi di un testo organizzando contenuti e forme; analizzare una tabella con la relativa descrizione e fornirne una rielaborazione personale.
- Domanda 2: riconoscere il modello probabilistico opportuno da utilizzare (frequentista basato sulla ripetibilità e regolarità) motivandone la scelta; applicare la legge dei grandi numeri.
- Domanda 3: esporre la definizione di probabilità soggettiva e produrre un esempio di applicazione.
- Domande 4 e 5: utilizzare strategie appropriate per la soluzione di problemi (approccio classico: diagrammi ad albero, tabelle a doppia entrata, principio fondamentale del calcolo combinatorio).
- Domanda 6: riconoscere il modello probabilistico opportuno da utilizzare (frequentista basato su dati statistici) motivandone la scelta.
- Domanda 7: leggere, comprendere e interpretare un testo e produrre un commento scritto.

Indicazioni per il somministratore

Somministrazione della prova in forma cartacea. Durata prevista: 90 minuti

Competenza/e (disciplinari e/o trasversali) di cui si vuole testare la padronanza:

COMPETENZE DI RIFERIMENTO PER LE DISCIPLINE

MATEMATICA:

Individuare le strategie più appropriate per la soluzione di problemi di vario tipo giustificando il procedimento seguito e utilizzando in modo corretto i linguaggi specifici.

Rilevare dati significativi in contesti reali, analizzarli, interpretarli, sviluppare deduzioni e ragionamenti sugli stessi, utilizzando, rappresentazioni grafiche e strumenti di calcolo.

ITALIANO:

Leggere, comprendere e interpretare diversi tipi di testi scritti.

Cogliere i caratteri specifici di un testo non continuo.

Saper produrre testi scritti di vario tipo.

Testo della verifica

Domanda 1:

Di seguito è riportata una selezione del testo di Galilei “Sopra le scoperte dei dadi” che hai già letto e analizzato a lezione.

Abbiamo dunque sin qui dichiarati questi tre fondamenti, primo, che le triplicità, cioè il numero delle scoperte dei tre dadi, che si compongono da tre numeri eguali, non si producono se non in un modo solo; secondo, che le triplicità che nascono da due numeri uguali, e dal terzo differente, si producono in tre maniere; terzo, che quelle che nascono da tre numeri tutti differenti, si formano in sei maniere.

Da questi fondamenti facilmente raccorremo in quanti modi, o vogliam dire, in quante scoperte differenti si possono formare tutti i numeri [o punti] dei tre dadi, il che per la seguente tavola facilmente si comprende, in fronte della quale sono notati i punti dei tir dal 10. in giù sino al 3. E sotto essi le triplicità differenti, dalle quali ciascuno di essi può resultare, accanto alle quali son posti i numeri, secondo i quali ciascuna triplicità si può diversificare, sotto i quali è finalmente raccolta la somma di tutti i modi possibili a produrre essi tiri, come per esempio:

10		9		8		7		6		5		4		3	
6.3.1	6	6.2.1	6	6.1.1	3	5.1.1	3	4.1.1	3	3.1.1	3	2.1.1	3	1.1.1	1
6.2.2	3	5.3.1	6	5.2.1	6	4.2.1	6	3.2.1	6	2.2.1	3		3		1
5.4.1	6	5.2.2	3	4.3.1	6	3.3.1	3	2.2.2	1		6				
5.3.2	6	4.4.1	3	4.2.2	3	3.2.2	3		10						
4.4.2	3	4.3.2	6	3.3.2	3		15								
4.3.3	3	3.3.3	1		21										
	27		25												

Nella prima casella abbiamo il punto 10. e sotto di esso 6. triplicità di numeri, con i quali egli si può comporre, che sono 6.3.1., 6.2.2., 5.4.1., 5.3.2., 4.4.2., 4.3.3. E perché la prima triplicità 6.3.1. è composta di tre numeri diversi, può (come sopra si è dichiarato) esser fatta da 6. scoperte di dadi differenti; però accanto ad essa triplicità 6.3.1. si nota 6. Ed essendo la seconda 6.2.2. composta di due numeri eguali, e di un altro diverso, non può prodursi se non in 3. differenti scoperte, però se gli nota accanto 3. La terza triplicità 5.4.1., composta di tre numeri diversi può farsi da 6.scoperte, onde si nota con il numero 6. e così dell'altre tutte. E finalmente a piè della colonnetta de' numeri delle scoperte è raccolta la somma di tutte: dove si vede, come il punto 10. Può farsi da 27. scoperte di dadi differenti ma il punto 9. [come il punto 12.] da 25 solamente, e l'8. da 21., il 7. da 15., il 6. da 10., il 5. da 6., il 4. da 3. e finalmente il 3.da 1., le quali tutte sommate insieme ascendono al numero di 108. Ed essendo altrettante le scoperte dei sossopra, cioè dei punti 11. 12.13. 14. 15. 16. 17. 18. si raccoglie la somma di tutte le scoperte possibile a farsi colle facce dei tre dadi, che sono 216.

A. Riassumi i concetti chiave del primo periodo, in cui Galilei enuncia i tre fondamenti.

B. Sottolinea i connettivi frasali che esplicitano i rapporti di causa-effetto e, in diverso colore, quelli che introducono delle ipotesi.

C. Individua la proposizione principale in ogni frase.

D. Descrivi con le tue parole la tabella costruita da Galilei.

E. Spiega utilizzando il lessico corretto e attuale perché il punteggio 10 è più frequente del punteggio 9, pur essendo entrambi ottenibili dallo stesso numero di “triplicità”.

Domanda 2:

Se lanci 1000 volte una moneta, quante volte ti aspetti che esca "testa" e quante volte "croce"? Motiva la risposta.

Domanda 3:

Dai la definizione di probabilità soggettiva e indica un evento la cui probabilità possa essere stimata soltanto con la definizione soggettiva.

Domanda 4:

Si lanciano due dadi. Qual è la probabilità di ottenere un punteggio maggiore di 8?
Quale definizione di probabilità hai utilizzato per rispondere alla domanda? Sulla base di quale ipotesi?

Domanda 5:

In un'urna vi sono 4 palline bianche, 3 palline nere e 2 palline rosse. Calcola la probabilità che, estraendo due palline, esse siano dello stesso colore. Distingui i due casi: la prima pallina estratta viene rimessa nell'urna oppure no.

Domanda 6:

Come procederesti per stimare la probabilità che scegliendo a caso un alunno del Liceo Russell, la sua massa risulti inferiore ai 50 Kg?
Quale definizione di probabilità hai utilizzato per rispondere alla domanda?

Domanda 7: (quesito n.7 dell'Esame di Stato del 2006)

Bruno de Finetti (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda "che cos'è la probabilità?" era solito rispondere: " la probabilità non esiste!". Quale significato puoi attribuire a tale risposta? E' possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

Domanda 8: (autovalutazione e riflessione sulla prova)

Quali domande ti sono sembrate più difficili e quali, invece, hai affrontato con maggior facilità? Per quale motivo?
Tra le domande proposte, a quali ti sembra di aver risposto in modo completo e corretto?

Ricostruzione del percorso di prova

La domanda n. 8 della verifica è finalizzata all'autovalutazione e alla riflessione sulla prova.

Rubrica di valutazione dei risultati

Dimensioni della competenza	Indicatori	Risultati attesi	Livelli
Individuare le strategie più appropriate per la soluzione del problema.	- riconosce il modello probabilistico opportuno da utilizzare - utilizza strumenti matematici opportuni	- utilizza opportunamente un modello frequentista (dom. 2-6) o un approccio classico (dom. 4-5) - utilizza diagrammi ad albero, tabelle a doppia entrata, principio fondamentale del calcolo combinatorio (dom. 4, 5) la legge dei grandi numeri (dom. 2)	**Avanzato:** individua correttamente gli approcci probabilistici e utilizza correttamente ed efficacemente gli strumenti matematici. **Intermedio:** individua correttamente gli approcci probabilistici e utilizza con qualche imprecisione gli strumenti matematici. **Base:**individua correttamente gli approcci probabilistici e utilizza parzialmente e con delle imprecisioni gli strumenti matematici. **Non raggiunto:** non individua correttamente gli approcci probabilistici e/o utilizza non correttamente gli strumenti matematici.
Giustificare il procedimento seguito.	- motiva la scelta dei diversi approcci probabilistici	- modello frequentista: ripetibilità e regolarità (dom. 2-6) o utilizzo di dati statistici approccio classico: equiprobabilità (dom. 4-5).	**Avanzato:** motiva sempre ed in modo esaustivo le sue scelte. **Intermedio:** motiva in modo complessivamente corretto la maggior parte delle sue scelte. **Base:** motiva in modo parzialmente corretto alcune delle sue scelte. **Non raggiunto:** non motiva o motiva non correttamente la maggior parte delle sue scelte.
Analizzare, interpretare, sviluppare deduzioni e ragionamenti.	- analizza la tabella nel testo di Galileo.	- descrive il significato dei dati presenti nella tabella (dom. 1D); - coglie le informazioni e ne fornisce una rielaborazione personale (dom. 1E);	**Avanzato:** coglie tutti i concetti e le relazioni tra essi. **Intermedio:** coglie i concetti principali e le relazioni principali tra essi. **Base:** coglie alcuni concetti principali e le relazioni più evidenti tra essi. **Non raggiunto:** non coglie i concetti essenziali e le relazioni tra essi.
Leggere, comprendere e interpretare i testi scritti.	- comprende e interpreta i testi proposti	• dimostra di saper interpretare correttamente le domande della verifica poste dall'insegnante e i testi, rispondendo alle richieste in maniera adeguata.	**Avanzato:** comprende completamente e interpreta correttamente i testi. **Intermedio:** comprende e interpreta abbastanza correttamente i testi. **Base:** comprende parzialmente e interpreta non sempre correttamente i testi. **Non raggiunto:** non comprende buona parte dei testi fornisce interprestazioni generalmente scorrette.

Saper produrre testi scritti di contenuto coerente utilizzando in modo corretto i linguaggi specifici.	- produce testi scritti di vario tipo.	- produce un commento scritto alla frase di De Finetti che la colleghi alla concezione soggettiva di probabilità (dom. 7) - riassume i tre fondamenti descritti nel testo di Galileo (dom. 1A) - espone la definizione di probabilità soggettiva (dom. 3) - produce un esempio di applicazione (dom. 3).	**Avanzato:** espone in modo corretto i testi in forma chiara ed efficace, utilizzando un linguaggio specifico. **Intermedio:** espone in modo sostanzialmente corretto i testi in forma abbastanza chiara ed efficace, utilizzando un linguaggio specifico. **Base:** espone in modo non sempre corretto i testi in forma abbastanza chiara, utilizzando un linguaggio globalmente adeguato. **Non raggiunto:** non espone o espone in modo scorretto i testi, utilizzando un linguaggio non appropriato.
Autovalutazione	- riconosce limiti, criticità e potenzialità.	- descrive le difficoltà incontrate, le motiva (dom. 8). - classifica le risposte in base alla completezza e alla correttezza (dom. 8).	**Avanzato:** descrive con precisione le sue eventuali difficoltà e valuta correttamente le sue risposte. **Intermedio:** descrive sommariamente le sue eventuali difficoltà e valuta abbastanza correttamente le sue risposte. **Base:** descrive in modo approssimativo le sue eventuali difficoltà e valuta correttamente solo alcune delle sue risposte. **Non raggiunto:** indica superficialmente o non indica affatto le sue eventuali difficoltà e non valuta correttamente la maggior parte delle sue risposte.