È definito celletta il complesso formato da una sezione normale all’asse di un prisma retto a base esagonale e una piramide a base esagonale con la stessa base adiacente a quella del prisma.

Sia O il centro dell’esagono di cui CK e KB sono lati consecutivi e siano GN e NM due lati consecutivi della base, come rappresentato in figura 1.
Sia A il punto di intersezione tra i segmenti CB e KO e sia E un punto del segmento KN.
Sia infine E’ il simmetrico di E rispetto a BC come rappresentato in figura 2.

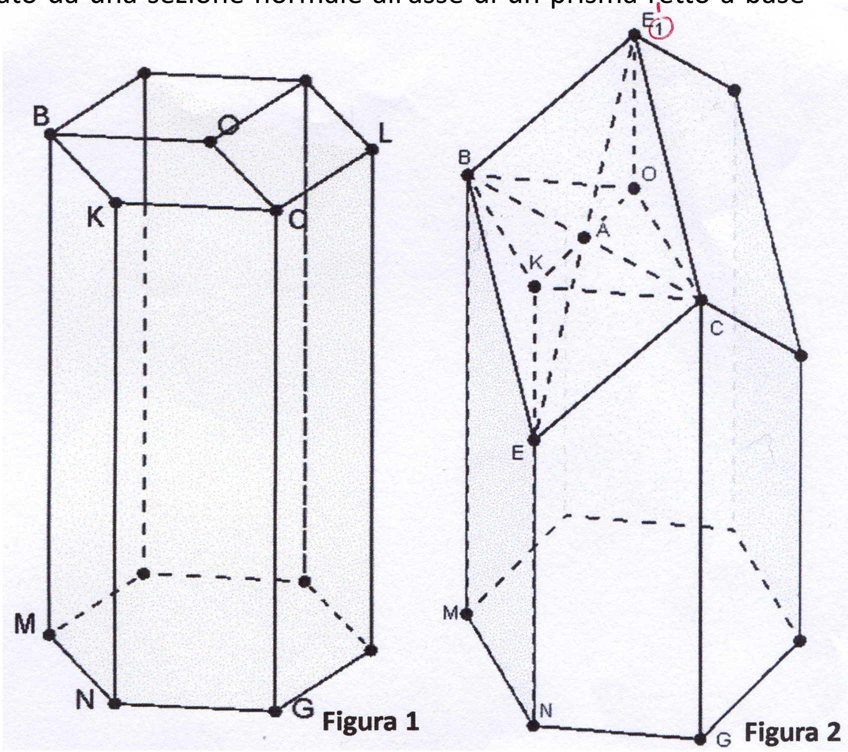

Figura 1 **Figura 2**

Di seguito si dimostrerà che:

1. il volume della celletta è lo stesso indifferentemente dalla posizione del punto E sulla retta KN.
2. a parità di volume la superficie della celletta è minima quando il punto E coincide con L dove L è un punto del segmento KN tale che $KN : KL = KC : BC$.
3. l’angolo $B\hat{L}C$ vale 109° 28’ 16’’

1. Il volume della celletta è lo stesso indifferentemente dalla posizione del punto E sulla retta KN.

I triangoli COB e CKB sono congruenti perché sono simmetrici rispetto a CB, dove CB è la diagonale maggiore del rombo CKBO. KE e OE’ sono congruenti perché sono simmetrici rispetto al punto A (figura 2). I solidi EBCK e E’BCO sono dunque congruenti. Ne segue che il volume del solido è lo stesso indifferentemente da dove venga preso il punto E sulla retta KN una volta fissati i punti C,K,B,G,N e M.

2. la superficie della celletta è minima quando il punto E coincide con L.

La superficie della celletta è minima quando l'area del rombo CEBE' e quella dei due trapezi CGNE e ENMB è minima. Poiché EE' è perpendicolare a BC in A (EE'e BC sono infatti diagonali del rombo), l'area del rombo BECE' è $AE\ x\ BC$ dove $AE = \frac{E'E}{2}$; l'area dei trapezi CGNE e ENMB è $(CG\ +\ EN) x\ KC$ (l'area non viene divisa per due poiché i trapezi sono due).

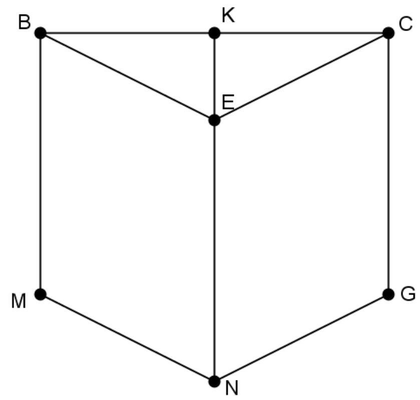

Figura 3

La somma di queste tre aree dà come risultato:

$AE\ x\ BC\ +\ 2KN\ x\ KC\ -\ KE\ x\ KC$

dove $2\ KN\ x\ KC$ rappresenta l'area di BMGC

e $KE\ x\ KC$ rappresenta l'area di CEBK (figura 3).

Poiché $2\ x\ KN\ x\ KC$ non varia al variare di E si deve dedurre quando $AE\ x\ BC\ -\ KE\ x\ KC$ [2] è minimo.

Sia L un punto di KN in modo tale che $LK\ :\ LA\ =\ KC\ :\ BC$ [1]. Con centro in A e con raggio AE si descriva nel piano AKE un arco di circonferenza ER che interseca AL (o il suo prolungamento) nel punto R. Siano EV perpendicolare a AR in V e KH perpendicolare ad AR in H come rappresentato in figura 4.

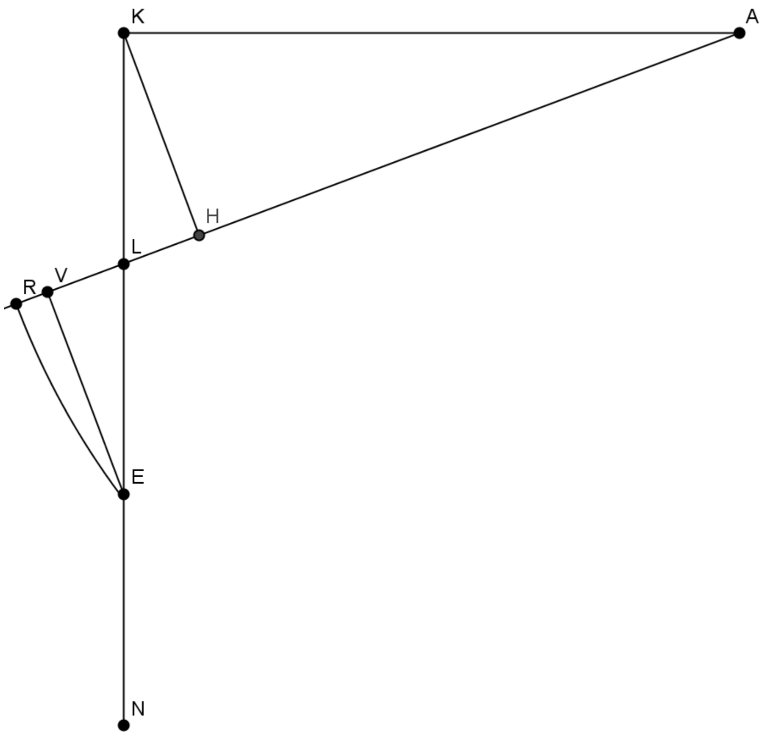

Figura 2

Figura 4

$K\hat{L}H \cong V\hat{L}E$ perché sono angoli opposti al vertice. Inoltre $K\hat{L}A \equiv K\hat{L}H$ oltre a ciò i tre triangoli sono rettangoli.

Di conseguenza LEV, LKH, LAK sono simili.

Ne segue che:

$$LV : LE = LH : LK = LK : LA = KC : BC$$

cateto min : ipotenusa = cateto min : ipotenusa = cateto min : ipotenusa = [1]

Quindi quando E si trova tra L e N (figura 4):

$LH + LV = VH \wedge LK + LE = KE$

$VH : KE = KC : BC$

Quando E si trova invece tra L e K (figura 5):

$LH - LV = VH \wedge LK - LE = KE$

$VH : KE = KC : BC$

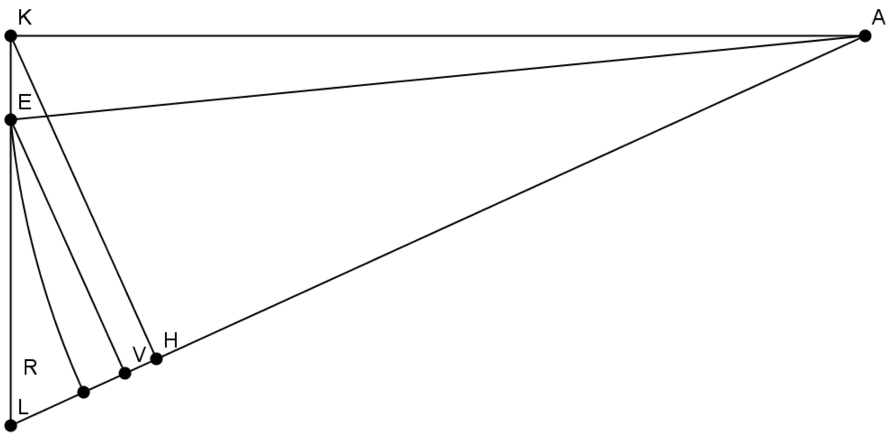

Figura 5

In entrambi i casi $KE \; x \; KC = VH \; x \; BC$ e conseguentemente

$AE \; x \; BC - KE \; x \; KC$ [2]

e raccogliendo BC :

AE e AR, come rappresentato in figura 4, sono raggi della stessa circonferenza, di conseguenza:

Inoltre come rappresentato in figura 4:

$$(AR - VH) x \; BC = (AH + VR) \; x \; BC$$

Poiché AH e BC non variano al variare di E $AE \; x \; BC - KE \; x \; KC$ è minimo quando VR si annulla e cioè quando E coincide con L.

3. l'angolo BLC vale 109° 28' 16''

OKC è un triangolo equilatero in quanto un esagono regolare è formato da sei triangoli equilateri.
A, come rappresentato in figura 6, divide OK a metà.
Di conseguenza $KC^2 = OK^2 = (2\,AK)^2 = 4\,AK^2$

Inoltre, per le regole della trigonometria,
$AC = AK \; x \; \tan\frac{\pi}{3}$
$AC = \sqrt{3}\,AK$
e $AC^2 = 3AK^2$

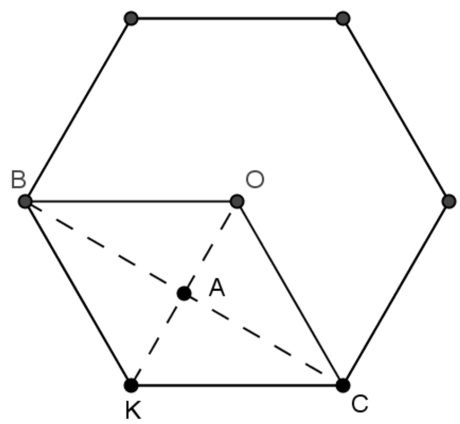

Figura 6

Ne segue che
$BC = 2\,AC = 2\sqrt{3}\,AK$

dunque

$KC : BC = 2\,AK : 2\sqrt{3}\,AK \Rightarrow \frac{KC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

e quindi

$LK : LA = KC : BC$ [1] $= 1 : \sqrt{3}$

Di conseguenza

$LA = \sqrt{3}\,LK$

Inoltre, poiché [4] AKL è un triangolo rettangolo: $AK = \sqrt{LA^2 - LK^2} = \sqrt{3LK^2 - LK^2} = \sqrt{2}\,LK$

$AC = \sqrt{3}\,AK$

Dunque

$AL : \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,AK = AC : \sqrt{3}\,AK$

e semplificando

$\frac{AL}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Inoltre per [4] $L\hat{A}C$ = $\tan^{-1}(\frac{AC}{AL}) = \tan^{-1}(\sqrt{2}) = 54{,}735°$

E quindi $C\hat{L}B$ = 109,47 ° = 109° 28’ 16’’