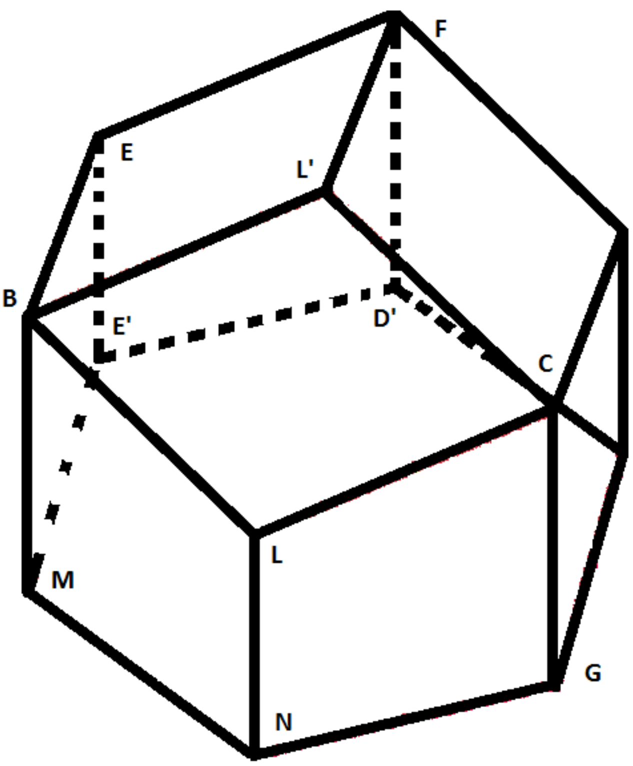
MATEMATICA APPLICATA: LE CELLETTE DELLE API[1]

REVISIONATO DA: Isaac Pellegrin; Andrea Antoniolli; Sebastian Carotta; Nicolò Chiocchetti.

PREMESSA DI SENSO

In questo testo verrà analizzato il metodo di costruzione delle celle nelle quali le api depositano il miele.

Le api costruiscono favi composti di vari livelli. Con livelli s'intendano due superfici generate da celle base. La struttura della cella, scelta per aumentare il contenuto di miele nell'alveare è tale per cui, a parità di contenuto, la quantità di cera impiegata nella costruzione della cella stessa è minima. La forma scelta per la costruzione della medesima permette la copertura di una superficie in modo da generare un piano privo di intercapedini, cioè le pareti ed il pavimento delle celle sono condivisi dalle stesse. La struttura che viene così a formarsi è un livello di celle, composto da due strati di queste, perfettamente incastrate tra loro, con all'interno alcuni fori che permettono il passaggio da uno strato all'altro. Ecco perché, per il risparmio di cera nella costruzione dell'insieme, è necessaria la riduzione della struttura base, che si ripropone costantemente.



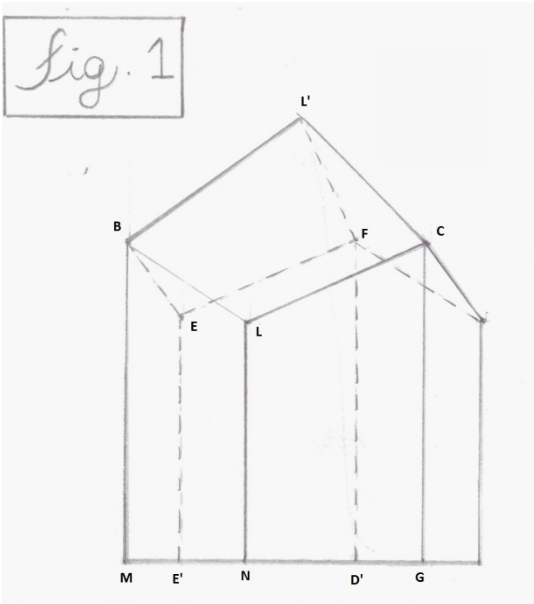
PREMESSA

È dimostrato che, dati tre piani tra loro incidenti che si incontrano in L' e formano tre angoli ottusi, ponendo questa costruzione al di sopra di un prisma a base esagonale e retto, coi centri delle basi del prisma sulla retta passante per L' ed equidistante dai tre piani, oltre che parallela agli spigoli del prisma, l'angolo solido formato dall'intersezione dei piani si ripete nell'incontro tra un piano e due facce del prisma. Sia L uno dei tre restanti vertici degli angoli solidi, mobile e dipendente dall'inclinazione dei piani. I restanti angoloidi, originati dall'incontro di due piani con due facce del prisma, generano quattro angoli solidi acuti uguali, ciascuno formato da angoli acuti supplementari agli angoli ottusi di prima. La struttura generata è quindi composta di tre rombi tra loro congruenti e sei trapezi identici. Questa struttura verrà d'ora in poi indicata col termine celletta.

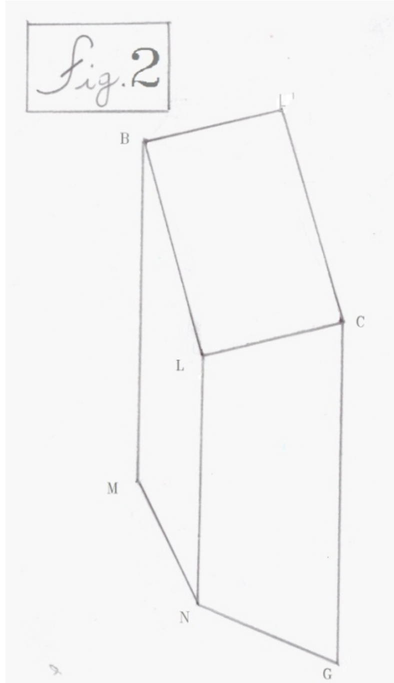
L'angoloide in L' è composto di tre identici angoli ottusi, ovvero quelli dei tre rombi. Essendo l'angolo solido in L composto di due angoli ottusi equivalenti (i due trapezi sono infatti congruenti), di un angolo ottuso appartenente a un rombo (dunque pari agli angoli ottusi dell'angoloide in L') e avendo la stessa inclinazione dell'angoloide in L', è lecito supporre i due angoli ottusi dei trapezi come identici a quello del rombo.

---

1 **SULLE BASI DELLE CELLE NELLE QUALI LE API DEPOSITANO IL LORO MIELE - PARTE DI UNA LETTERA DI MR. MAC LAURIN, PROFESSORE DI MATEMATICA AD EDIMBURGO**



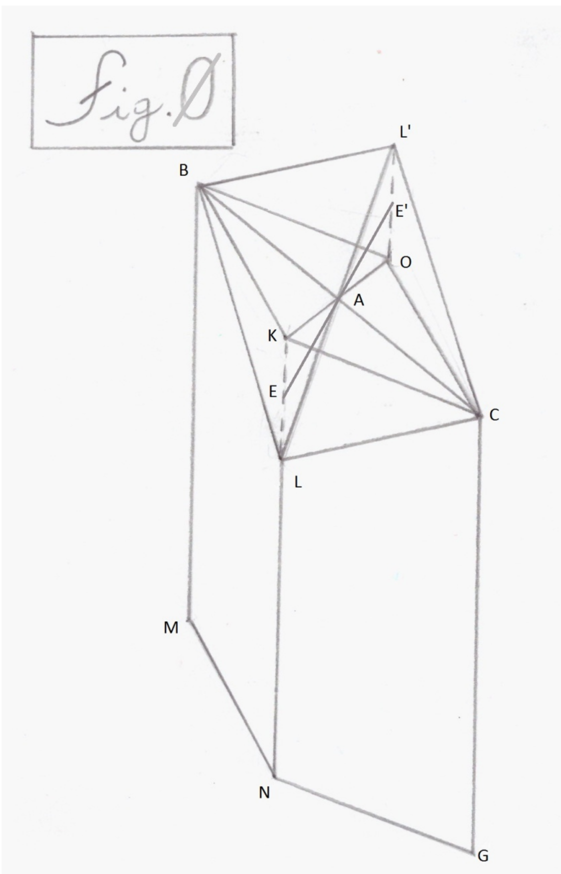
Dunque, i due angoli solidi sono congruenti tra loro. Essendo inoltre l'angoloide in L pari agli altri due angoli solidi, generati dall'incontro dei restanti due rombi coi restanti quattro trapezi, si può concludere che i quattro angoloidi in questione si equivalgono. Lo stesso ragionamento vale per gli angoli solidi acuti. Si tenga conto della possibile variazione di posizione da parte dei punti L ed L'. Alle api è perciò richiesta la memorizzazione di un solo angolo, di circa 109°26' oltre al suo supplementare, che risulta essere approssimativamente di 70°34'.



DIMOSTRAZIONE

Siano B,L,C i tre vertici consecutivi di uno dei rombi. Siano M,N,G, la proiezione sulla base del prisma dei punti B,L,C. Si ottengono due trapezi rettangoli B,L,N,M, e L,C,G,N, i cui lati obliqui costituiscono due lati consecutivi del rombo. Questo rombo è B,L,C,L'. Nell'insieme, due trapezi e un rombo costituiscono un terzo della celletta (fig.2) composta da tre terzi tra loro identici. Per la riduzione di cera utile alla costruzione della celletta risulta necessaria la maggior detrazione della superficie di un terzo della stessa.

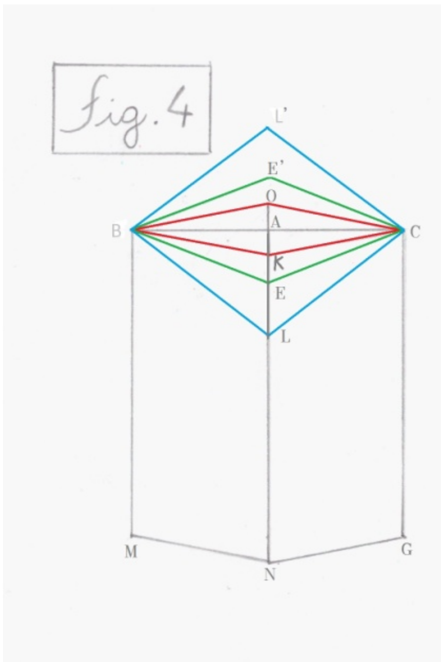
A PARITÀ DI VOLUME...



(Si guardi la figura Ø e figura 1)

Sia il punto D il terzo vertice generato dall'incontro tra due trapezi e due rombi, oltre a B e C.

Dati i punti K e O come proiezioni di L e L' sul piano BCD, costruire un esagono con centro O del quale BK e KC sono due lati consecutivi. Con l'unione di BC e KO, si trova il punto A, centro del rombo BKCO. BK, KC, CO e BO sono quindi congruenti. Siano E' e E come traslati di O e K sulle rette NL e OL' tali che il punto E' sia il simmetrico di E rispetto ad A. Si crea una figura solida mobile che costituisce un terzo del pavimento inclinato della celletta (fig. 4). La posizione di E, con E' vincolato, determina la maggiore o minore inclinazione del rombo BECE', oltre alla variazione di volume del solido EBCK, equivalente ad E'BCO.



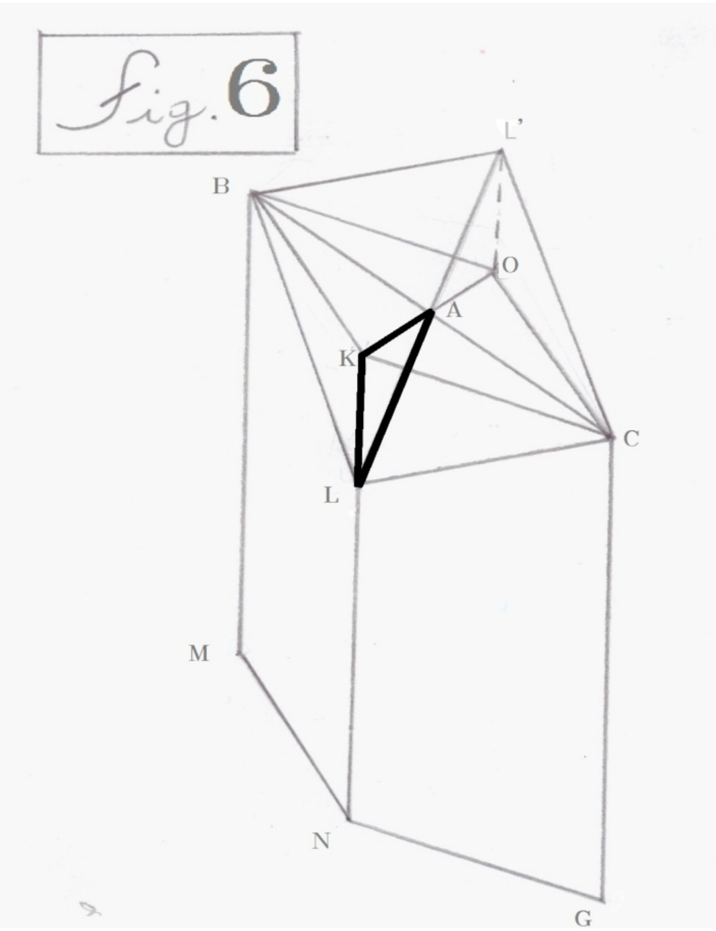
Dunque la celletta ha lo stesso volume del prisma di altezza KN poiché il volume EBCK che si sottrae nel passaggio da pavimento piano a pavimento piramidale è controbilanciato dal volume E'BCO, che in questo caso si somma al volume della celletta. Questo ragionamento funziona sia per E compreso tra L e K, che per E oltre K o oltre L, purché sempre sulla retta LK.

...LA SUPERFICIE PIÙ VANTAGGIOSA

Va ora ricercato, tra quelli equivalenti, il solido che permette la maggiore riduzione di superficie.

PREMESSA

(con riferimento alla Fig.0...)



l rombo BECE' è data dal prodotto tra BC ed E'E:2, cioè uella di CENG, essendo i trapezi equivalenti, è data dal

ınche la differenza tra la somma delle aree dei rettangoli ngoli (KEB+KEC). Le aree dei triangoli KEB,KEC, essendo 2 + KE*KB:2. Ma essendo KB = KC, l'area congiunta dei

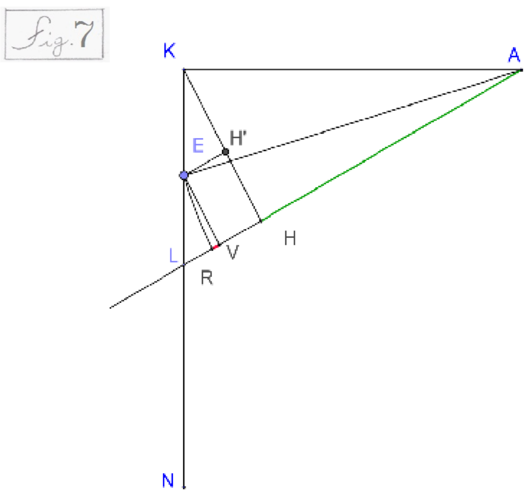
‹C*CG-KE*KC), ovvero tre volte la somma dell'area di un oli e quella di due triangoli (triangoli, rettangoli e rombi, ettangoli sopra citati è costante al variare della posizione la minimizzazione della superficie della celletta, il maggior mbo privata dell'area dei triangoli.

ˆO tale che KL:AL = KC

ırco di circonferenza c pendicolari a AL rispe

LAK) sono simili, pe

‹ per l'assunzione fatt



4) Ne segue che LV:LE = LH:LK = KL:AL = KC:BC

Quando E sta tra K e L si ha che, detto H' il traslato di H su KI

5a) LH-LV = HV, e LK-LE = KE

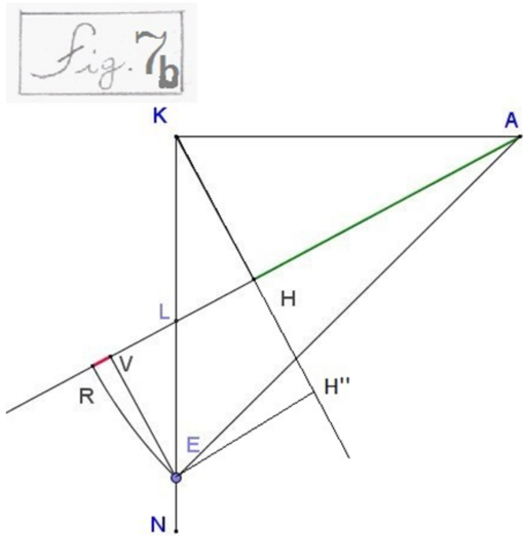
L'angolo in E del triangolo EKH' è pari all'angolo in L del triangolo LKH poiché i lati LH ed EH' sono paralleli

L'angolo in K è condiviso, dunque

6a) HV:KE = LH:LK

7a) E per il punto 4, LV:LE = LH:LK = LK:LA = KC:BC = HV:KE = KC:BC

Quando E sta tra L e N, detto H'' il traslato di H sulla retta KH tale che HV = EH'' (Fig.7b)



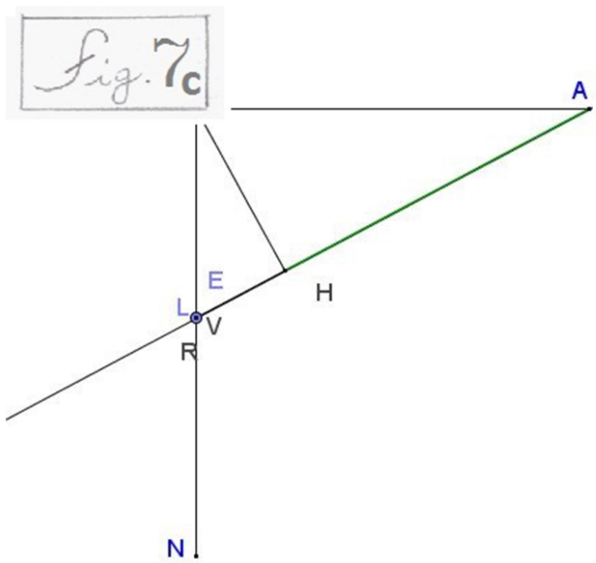
5b) (LH+LV) = HV e (LK+LE) = KE

L'angolo KLH = KEH'', poiché HV è parallelo ad EH''

L'angolo in K è condiviso dai triangoli KLH, KEH''. Dunque questi due triangoli sono simili, cioè

6b) HV:KE = LH:KL, e per il punto 7a

7b) LV:LE = LH:LK = LK:LA = KC:BC = HV:KE (Fig.7b). Quando E sta su L



5c) LH:LK = LK:LA = KC:BC = HV:KE (Fig.7c).

Dunque il rapporto tra questi segmenti è costante al variare della posizione di E.

KE*KC=HV*BC, per l'enunciato soprastante

AE*BC-KE*KC = AE*BC-HV*BC = (AE-VH)BC.

E siccome AE = AR, AR-VH = AE-VH perciò

(AR-VH)BC = (AH+VR)BC = area del rombo priva di una porzione di area costante.

AH,BC sono invariati. È evidente che per la massima riduzione della superficie il segmento VR dev'essere nullo. Perché questo segmento sia nullo, come si vede dalla Fig.7c, E deve coincidere con L.

Essendo la celletta composta da rombi e trapezi, avendo assunto i trapezi come rettangoli invariabili meno una parte degli stessi rombi, e avendo concluso quale superficie sia minima per questi ultimi si può affermare che, quando KL:AL = KC:BC la superficie della celletta, a parità di contenuto della stessa, è minimizzata.

Dunque BLCL' appare come il rombo che permette il minor rapporto area-volume della celletta quando

KL:AL = KC:CB

LV:LE = LH:LK = LK:LA = KC:BC = HV:KE

(Con riferimento alla Fig. Ø)

A è il punto medio di OK, OK = OC = BO

Per il rombo BKCO, OC = KC

a) Ne segue che $(KC)^2 = (OK)^2 = (2AK)^2$

b) 2AC = BC e dunque, per il teorema di Pitagora, (2AK, cioè KC per il punto a)$^2 - AK^2 = AC^2$

c) $AC^2 = (2^2 - 1^2)AK^2$ e cioè $(AC)^2 = 3(AK^2)$, per il punto b

d) $BC = 2AC = 2\sqrt{3}AK$, per il punto c

e) Dai punti a e d, $KC:BC = \cancel{2AK}:\cancel{2}\sqrt{3}\cancel{AK} = 1:\sqrt{3}$

f) E dunque $KL:AL = KC:BC = 1:\sqrt{3}$, perciò

g) $AL:KL = \sqrt{3}:1$

Ecco che, per il punto f

h) $KL^2:AL^2 = 1:3$, $AL^2 = 3KL^2$, ed essendo $AK^2 = AL^2 - KL^2$

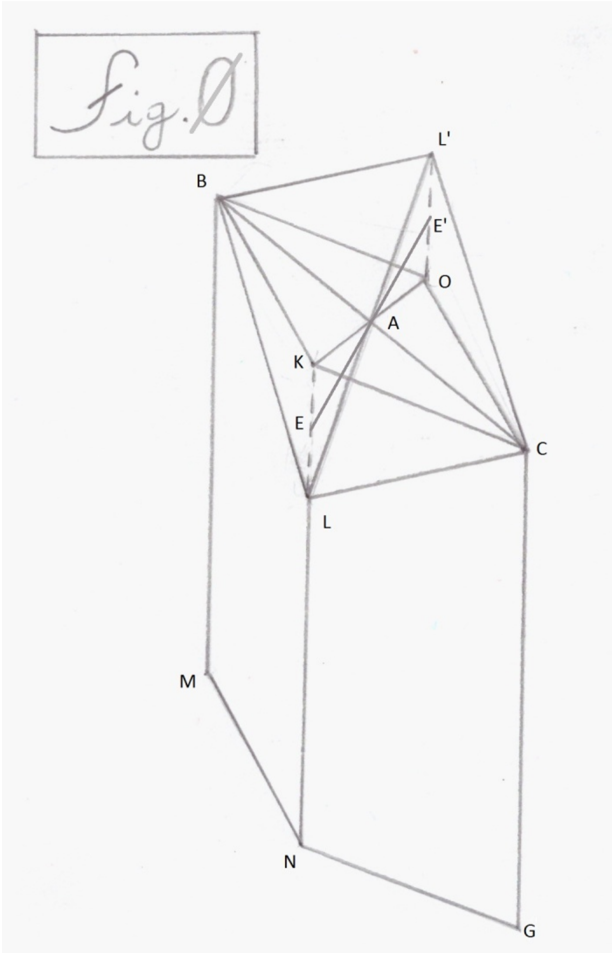
i) $AK^2 = (3 – 1 = 2)KL^2$

l) $AK = \sqrt{2}KL$

m) Per i punti g ed l, $AL:AK = \sqrt{3}:\sqrt{2}$

n) E siccome $AC^2 = KC^2 - AK^2 = (4-1)AK^2 = 3AK^2$

o) Risulta, dai punti n e m, $AL:AC = 1:\sqrt{2}$, che poi è il rapporto raggio : tangente.



Questa è dunque la misura della cotangente dell’angolo, il quale risulta essere di 54°44'08". Di conseguenza, l'ampiezza migliore per l'angolo del rombo, cioè il doppio dell'angolo CLA trovato, risulta essere di

109°28'16''