UN PROBLEMA DI MASSIMO E MINIMO: la geometria dell’alveare

È definito alveare la costruzione verticale di cera eseguita dalle api operaie all’interno dell’arnia. È costituito da due ordini di celle a sezione esagonale opposti l’uno all’altro, aventi le basi in comune (Figura 1).

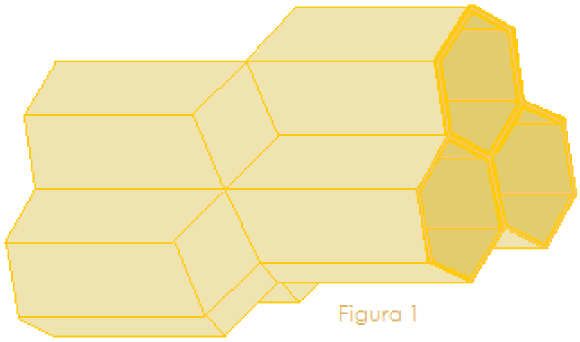
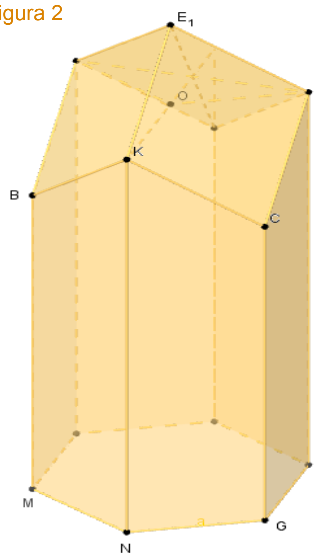


Figura 1

Figura 2



Per cella si intenda il solido cavo formato da 6 facce laterali trapezoidali e tre rombi adiacenti costituenti la base (Figura 2).

Per mezzo dei principi della geometria di base, sarà spiegata quale deve essere la forma ottimale del fondo della cella, tale da permettere il minor impiego di cera a fronte della stessa quantità di miele immagazzinabile in essa.
Sarà preso in analisi un solo modulo costituito da due facce di un trapezio e dalla faccia del rombo adiacente (Figura 3). Di conseguenza sarà chiamata cella la figura costituita da tre moduli congruenti.

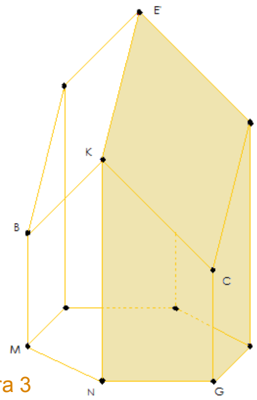


Figura 3

La base piramidale della cella, determina un fondo condiviso con altre tre celle. Questa condivisione è detta costruzione in opposizione (Figura 1).
L’incastro perfetto implica assenza di interstizi tra le celle e sono garantite questo modo:

- regolarità della costruzione;
- semplicità nella realizzazione;
- minimizzazione di superficie a parità di volume di miele contenuto.

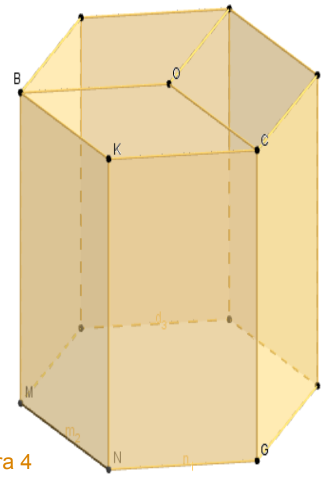


Figura 4

Dato il prisma retto a base esagonale cavo e privo della base inferiore, sia E un punto appartenente allo spigolo NK (Figura 4). La forma ottimale della base è quella piramidale, in modo tale da salvaguardare il principio di condivisione.
Quando la figura di base è piana, gli angoli ottusi dei rombi misurano 120° poiché costituiti ciascuno da due triangoli equilateri (Figura 4).
Quando il punto E non coincide con il centro O della base piana, l'ampiezza degli angoli del rombo cambia in relazione alla posizione di E (Figura 2).

Siano poi GN e NM due lati consecutivi dell’esagono costituente la sezione normale della cella (faccia esagonale piana). Le sei facce laterali del prisma sono trapezi rettangoli (CGNK e BMNK) poiché il solido è delimitato superiormente da una piramide. Il suo vertice è E’ che costituisce il punto comune tra i 3 rombi.

Figura completa = 6 facce a trapezio + 3 rombi con punto E’ in comune (Figura 2)

Sia O il centro dell’esagono, del quale CK e KB sono due lati consecutivi e sia A il punto di intersezione tra i segmenti CB e KO. Poiché COB =CKB e KE=O*E’*, il solido EBCK è uguale al solido *E’*BCO (piramidi simmetriche rispetto a BC). Da questa relazione è ovvio che il volume della cella sarà lo stesso ovunque il punto E sia preso sul lato KN, fissati i punti C, K, B, G, N e M (Figura 5).

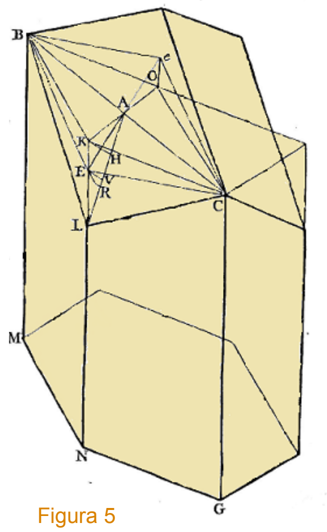


Figura 5

Il problema consiste nello stabilire la posizione di E, affinché venga adoperata la minor quantità di cera possibile per ricoprire la superficie totale (area 3 rombi + area 6 trapezi).

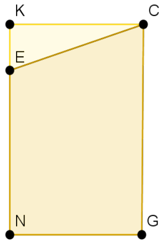


Figura 6

Poiché E*E’* è perpendicolare a BC, l’area del rombo si ricava mediante il semiprodotto delle diagonali AE*BC mentre quella dei due trapezi facendo (CG+EN)*KC, ovvero la somma della basi che moltiplica l’altezza (Figura 6).

Pertanto l'area dei trapezi del rombo è data dalla relazione:

$$\text{Area}= \underbrace{AE*BC}_{\text{Area rombo}}+\underbrace{2(KN*KC)-KE*KC}_{\text{Area trapezi mediante differenza area tra 2 rettangoli e 2 triangoli}}$$

Poiché 2(KN*KC) è invariabile rispetto alla scelta di E, non contribuisce alla minimizzazione dell'area della cella. Pertanto, rimuovendo questa parte della formula, l’espressione che ne deriva risulta essere:

$$\text{Area}= AE*BC-KE*KC$$

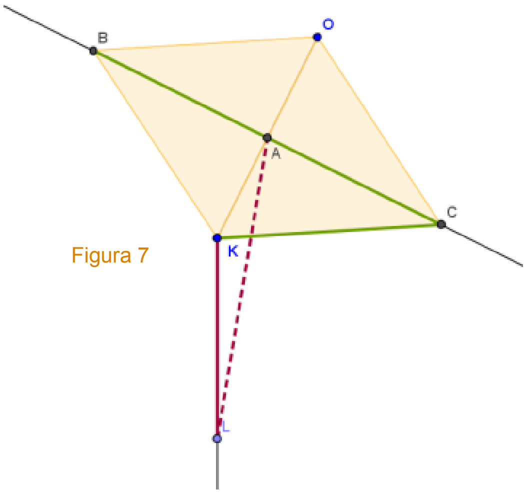


Figura 7

Si fissi il punto L sul lato KN secondo la relazione KL:AL=KC:BC (Figura 7).

Poi dal centro A, si descriva con raggio AE un arco di circonferenza nel piano AKN, che intercetti il segmento AL, o il suo prolungamento, nel punto R. Sia VH la proiezione del segmento EK su AL. Si ottengono così tre triangoli simili: LEV, LKH e LAK.

In tal modo la relazione tra i lati può essere ampliata secondo la proporzione LV:LE=LH:LK = KL:AL.

Se E si trova tra L e N, (LH+LV=VH):(LK+LE=KE)=KC:BC (Figura 8).

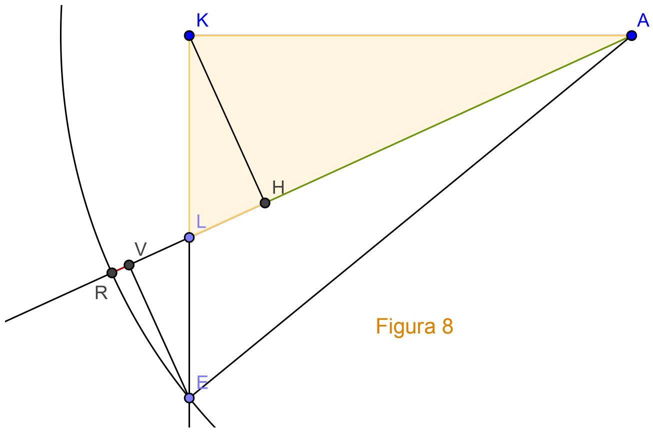


Figura 8

Figura 8

Nel caso in cui E si trovi tra K e L, (LH-LV= VH):(LK-LE=KE)=KC:BC (Figura 9).

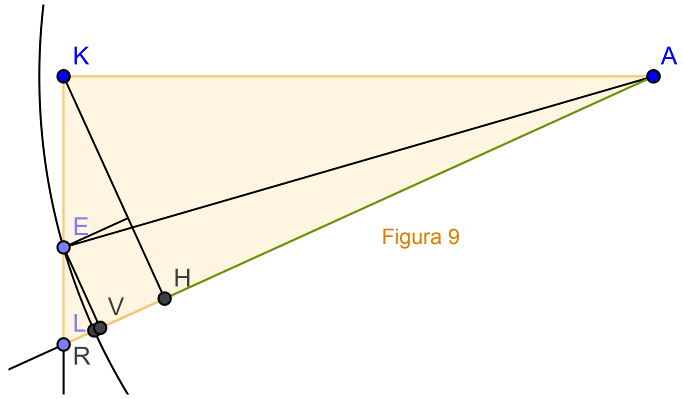


Figura 9

Poiché in ambedue i casi KE*KC=VH*BC, ne consegue che
AE*BC-KE*KC=AE*BC-VH*BC=(AE-VH)*BC=(AR-VH)*BC=(AH-VR)*BC.

AH e BC sono invariabili poiché indipendenti dalla scelta di E.

Figura 9

Lo scopo è capire quando, in base alla posizione di E, l' espressione sottostante dà il valore minimo.

$$(\underbrace{AH}_{\text{Fisso}}+\underbrace{VR}_{\text{Variabile}})*\underbrace{BC}_{\text{isso}}$$

Si osservi che E, avvicinandosi a L, riduce la lunghezza del segmento VR fino a renderlo nullo quando E coincide con L, cosicché con il calcolo AH*BC si ottiene il **valore minimo**.

In conclusione, il rombo CLB*L'* è quello che minimizza il consumo di cera ed è stato ottenuto partendo dall'assunzione KL:AL=KC:BC. Rimane da trovare il valore dell'angolo ottuso del rombo.

Poiché OK biseca il rombo in A, $OK^2=CK^2=4AK^2$ (Figura 10).

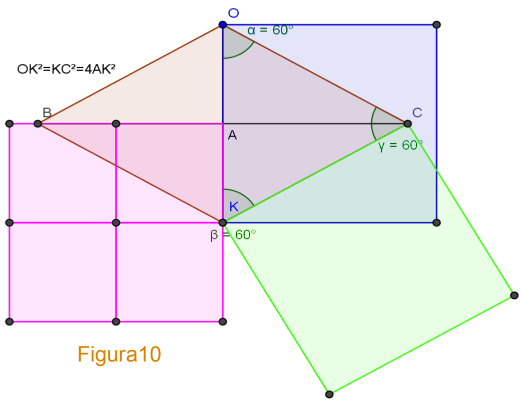


Figura10

Infatti OK e CK, sono lati di un triangolo equilatero e AK corrisponde alla metà del primo.

Poiché √3 corrisponde al valore della tangente di 60° (angolo di un triangolo equilatero), moltiplicato per la semilunghezza del lato, dà l'altezza del triangolo.

Di conseguenza:

$\frac{AC}{AK} = tan60° = \sqrt{3}$ da cui $AC^2= 3AK^2$

Essendo poi BC=2AC e AC=√3AK, si ricava che BC=2√3AK.

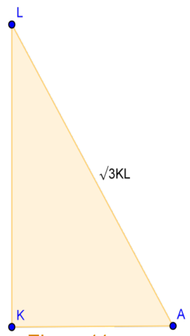


Figura11

Possiamo così scrivere le relazioni:

- KC:BC=2AK:2√3AK=1:√3;
- KL:AL=KC:BC=1:√3;
- AL:AK=√3:√2.

Infatti $\frac{AL}{KL}$ =√3 da cui AL= √3KL (Figura 11).

Poiché AK:AC=1:√3, e $AK = \sqrt{AL^2 - KL^2} = \sqrt{3KL^2 - KL^2} = \sqrt{2KL^2} = \sqrt{2}KL$,
allora AL:AC=1:√2.

Essendo pertanto AL=√3KL e AK=√2KL=√3AC, si ha

$$\frac{AL}{AC} = \frac{\sqrt{3}KL}{\frac{AK}{\sqrt{3}}} = \frac{3KL}{AK} = \frac{\frac{\sqrt{3}AK}{\sqrt{2}}}{\frac{AK}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

tanCLA =

da cui segue che l'angolo CLA è uguale a 54°44'08'' e quindi l'angolo BLC misura 109°28'16''.