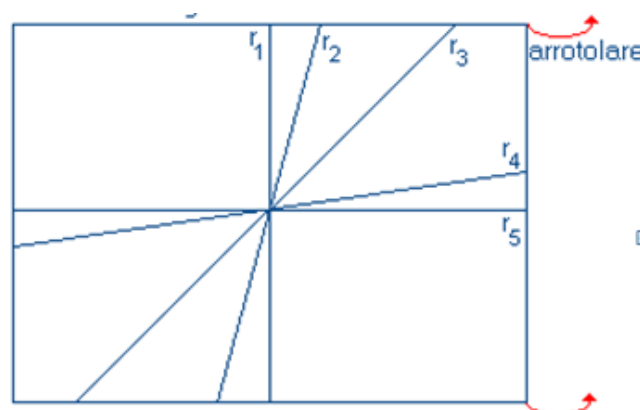


GEODETICHE SU UNA SUPERFICIE CILINDRICA

Per il momento l'unica superficie curva di cui abbiamo individuato le geodetiche è la superficie sferica; tale superficie, come si intuisce, è la più facile da studiare. E' opportuno però, per chiarire la nozione di linea geodetica, studiare qualche altra situazione: in questo paragrafo ci occuperemo delle geodetiche sulla superficie di un cilindro.

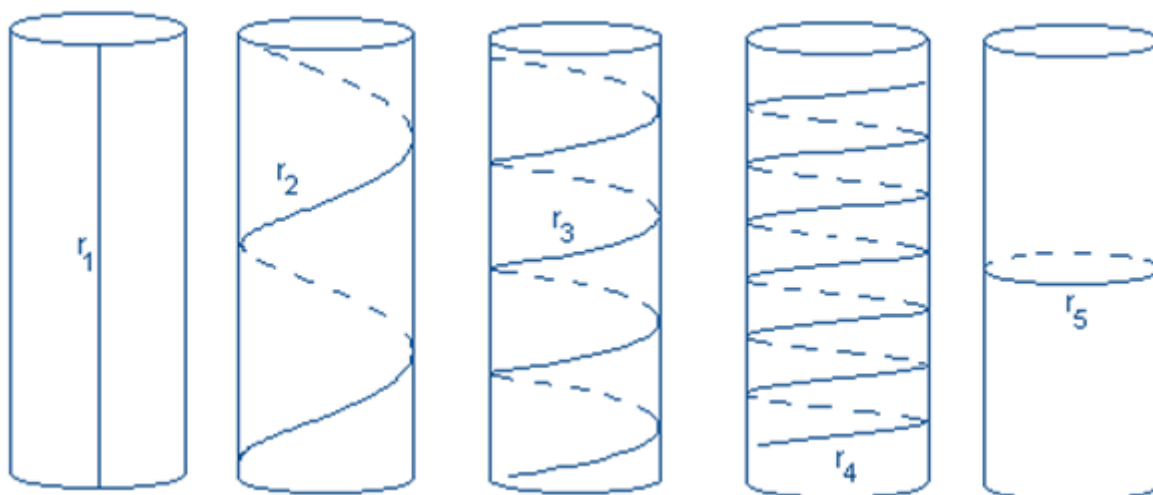
Esperimento1: *Dalla retta all'elica*

Tracciate su un foglio trasparente, ad esempio su un lucido, alcune rette con inclinazione diversa come vedete nella figura a fianco. Potete usare un pennarello a punta grossa o un correttore a nastro. Fate attenzione all'inclinazione delle rette e ai rispettivi coefficienti angolari (ove esistono). *(foto)*



Arrotolate poi il lucido in direzione orizzontale in modo che il foglio si sovrapponga più volte a se stesso. Otterrete, come è chiaro, un cilindro (senza basi). Ma, attenzione, le linee rette sulla superficie piana del lucido si sono trasformate, quasi per magia, in stupende linee curve ad elica sulla superficie del cilindro. *(foto)*

Nella figura seguente vedete le cinque curve che si ottengono "arrotolando" le rette r_1 , r_2 , r_3 , r_4 ed r_5 : le linee rette sulla superficie piana del lucido si sono **trasformate** in linee curve sulla superficie di un cilindro.



- Tutte le linee ottenute sono linee geodetiche; tenete infatti presente che si passa dal piano (foglio) al cilindro (foglio arrotolato) operando una flessione **senza dilatazione**. Ciò significa che la distanza tra due punti A e B presi su una retta del foglio rimane invariata quando la retta si arrotola sul cilindro (fatta eccezione per il caso della retta r_5 che si arrotola su stessa).

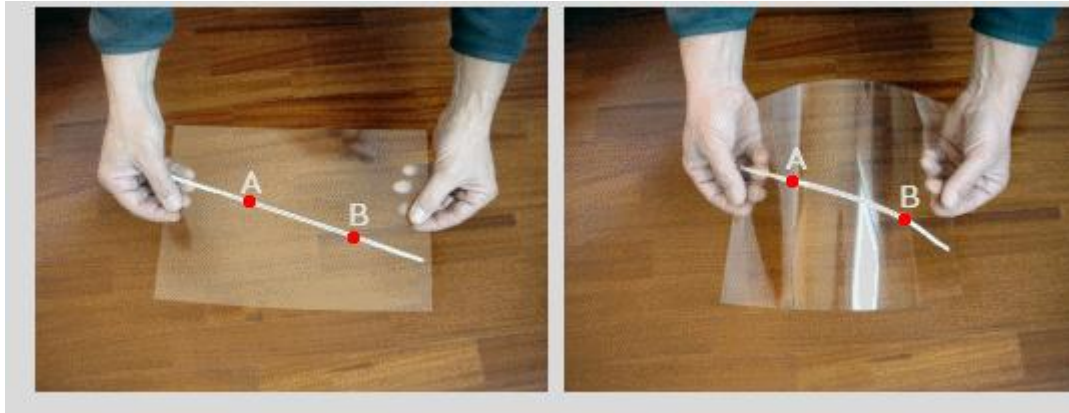
Si intuisce quindi che le geodetiche sul foglio si trasformano in geodetiche sul cilindro.

Cerchiamo di chiarire il concetto:

Esperimento2: I percorsi più brevi sulla superficie cilindrica

Disegnate due punti A e B su una delle rette precedentemente tracciate. Cosa succede se si passa dal piano (foglio) al cilindro (foglio arrotolato)? (foto)

La figura seguente mostra che una flessione del foglio conserva la distanza tra due punti, misurando la distanza tra i due punti **sulla superficie** (distanza intrinseca) e non nello spazio.



Se questo discorso non vi convince fate una verifica diretta sul cilindro col metodo dell'elastico (come negli esperimenti della lezione 1), utilizzando un cilindro di cartone (ricavabile da un rotolo di carta che trovate in casa).

Mettete in leggera tensione un elastico, fissandolo con due spilli (punti A e B) considerando **archi non troppo lunghi** su ciascuna geodetica. (foto)

Se lo spostate lungo la superficie e poi lo lasciate andare cosa succede? (foto)

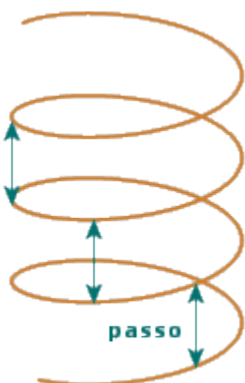


- le linee curve r_2 , r_3 , r_4 si chiamano **eliche circolari**, r_1 e' una retta (generatrice del cilindro) e r_5 e' una circonferenza che si trova su un piano perpendicolare all'asse del cilindro.

Osservate che le eliche r_2 , r_3 , r_4 hanno **passo** diverso: il passo di un'elica circolare e' la distanza costante tra due "spire" successive, ad esempio r_2 ha un passo maggiore di r_3 .

Osservate che partendo dalla posizione di r_5 sul foglio (retta orizzontale) e aumentando gradualmente l'inclinazione della retta fino ad arrivare alla disposizione verticale di r_1 , le corrispondenti eliche sul cilindro hanno un passo che va via via crescendo (dalla situazione estrema di r_5 che ha passo zero all'altra situazione estrema di r_1 che ha passo infinito).

Naturalmente sulla superficie del cilindro esistono infinite eliche di passo diverso. Possiamo considerare anche le linee r_1 ed r_5 come particolari eliche circolari, la prima, come si è detto, di passo infinito, la seconda di passo zero. Si potrebbe dimostrare che tutte le geodetiche della superficie cilindrica sono eliche circolari (tenendo conto anche di quelle del tipo r_1 e del tipo r_5).



Esperimento3: Confronto tra geodetiche per due punti

Arrotolate un lucido sul quale avete tracciato due rette con diversa inclinazione.

Disegnate due punti P e Q per i quali passino due archi di linee geodetiche; evidenziate l'arco più breve (sulla prima geodetica) con un tratteggio rosso; osservate l'arco sulla seconda geodetica, partendo da P, passa dietro al cilindro e raggiunge Q. (foto)

E' chiaro che il percorso più breve tra P e Q è il primo arco (su questo si disporrebbe l'elastico).



La cosa da capire è allora questa: i due punti P e Q staccano un arco che possiamo considerare **non troppo lungo** sulla prima geodetica ma non sulla seconda.

Si può inoltre osservare che per P e Q passano infinite geodetiche (basta considerare eliche da P a Q con passo via via decrescente) ma per nessuna di esse, eccetto per la prima indicata, l'arco PQ può considerarsi non troppo lungo (anzi via via che il passo decresce l'arco PQ diventa sempre più lungo).

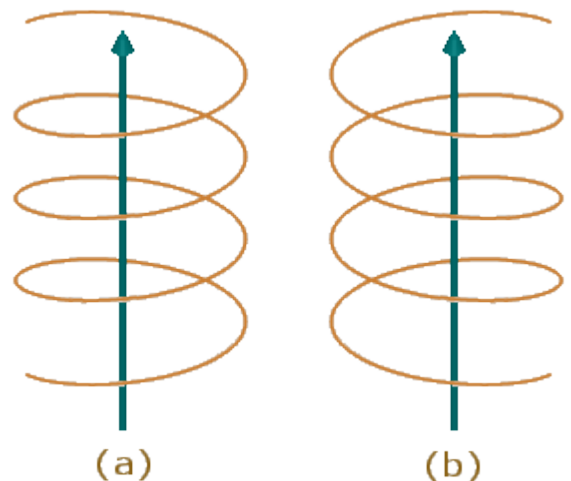
Notate infine che le due geodetiche in fotografia, se prolungate idealmente, si intersecano in infiniti punti! Se tuttavia considerate una regione limitata di cilindro in modo che le geodetiche si "arrotolino" sulla superficie per meno di mezzo giro avrete una geometria di tipo euclideo.

Esperimento4: Chiralità dell'elica

Provate ad arrotolare il lucido del primo esperimento nell'altro modo possibile (ribaltando il foglio prima di arrotolarlo). Otterrete così la stessa geodetica sul cilindro? (Cioè la stessa elica circolare?) (foto)

No, si ottiene un'elica non sovrapponibile alla prima benché, come vedete in figura, le due curve siano simmetriche rispetto ad un piano. La prima è un'elica **destrorsa**, cioè si avanza nella direzione del vettore ruotando in senso antiorario; la seconda è un'elica **sinistrorsa**, cioè si avanza nella direzione del vettore ruotando in senso orario.

La **chiralità** (dal greco *χείρ cheir*, "mano"), è in senso generale la proprietà di avere un'immagine riflessa (simmetria assiale) non sovrapponibile a sé come avviene, appunto, nel caso di una mano. In matematica, un oggetto geometrico è **chirale** se non è possibile sovrapporre l'immagine riflessa con l'oggetto originario tramite traslazioni e rotazioni. (L'elica è chirale, i poligoni regolari no)



Per comprendere meglio i concetti vi consiglio lo studio del paragrafo 10 dell'ipertesto [La geometria sulla sfera](#).