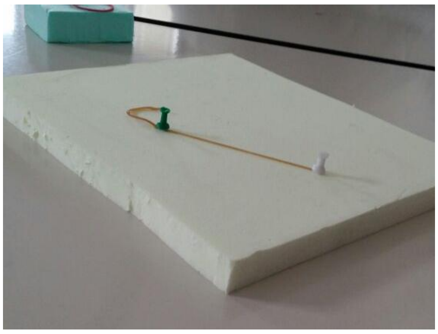
I PERCORSI PIU' BREVI

Lezione 1:

ESPERIMENTO 1:



Titolo: I percorsi più brevi su una superficie piana.

Obiettivo: trovare la minima distanza fra i punti, disposti su una superficie piana, A e B.

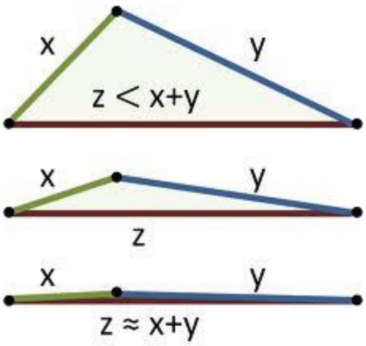
Materiali e strumenti:

- Superficie piana in polistirolo
- Spilli
- Elastici

Metodologia:
Mettiamo in tensione un elastico, fissandolo con due spilli (punti A e B) su una lastra di polistirolo. ***Come si dispone?***
L'elastico si dispone su un percorso minimo, cioè un segmento (AB) di retta.

Senza toccare gli spilli, spostiamo l'elastico lungo il piano (fissandolo momentaneamente con un terzo spillo, (punto C) e poi lasciamolo andare**.**
Cosa succede?
Dopo qualche oscillazione riassume lo stato di minima tensione.

Osservazioni e conclusioni:
Questa disposizione è quella di minima distanza fra A e B per la **disuguaglianza triangolare**. Essa afferma che, in un triangolo, la somma delle lunghezze di due lati è maggiore della lunghezza del terzo. La disuguaglianza triangolare può essere usata per provare che la distanza più breve tra due punti è realizzata dal segmento rettilineo che li congiunge. Nella sua forma per poligoni generali, essa già prova che ogni percorso lungo una linea spezzata è più lungo di quello lungo il segmento rettilineo che congiunge i due punti. Poiché la lunghezza di una curva qualsiasi è definita come l'estremo superiore della lunghezza delle spezzate che approssimano la curva, si ha che essa è più lunga proprio di queste spezzate, e quindi anche del segmento rettilineo tra i due punti.



ESPERIMENTO 2:

Titolo: I percorsi più brevi sulla superficie sferica.

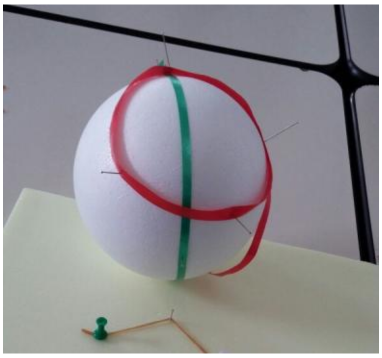
Obiettivo: trovare la minima distanza fra i punti, disposti su una sfera, A e B.

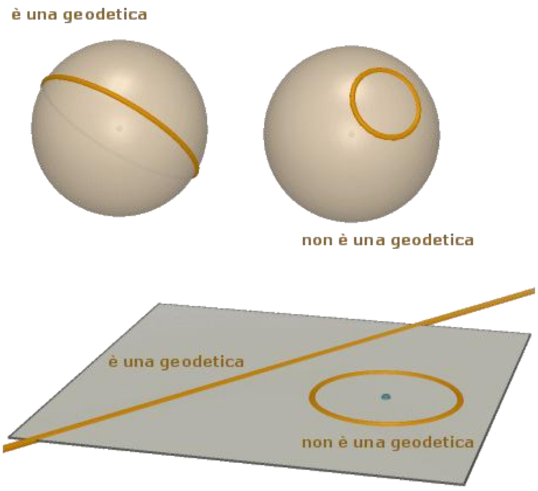
Materiali e strumenti:

- Nastro per pacchi natalizi
- Sfera in polistirolo
- spilli

Metodologia:

Applichiamo una striscia di nastro per pacchi natalizi su una palla di polistirolo
(vedi foto) La strisciolina aderisce alla palla lungo archi geodetici, cioè lungo archi di circonferenza massima.
Ora applichiamo una striscia di nastro lungo archi non geodetici, cioè circonferenze minori. ***(vedi foto)***
Mettendo in leggera tensione un elastico, fissandolo con due spilli (punti A e B) non antipodali su una sfera di polistirolo.
L'elastico si disporrà lungo un arco di circonferenza massima.
Possiamo allora concludere che l'arco minore AB di circonferenza massima è il percorso più breve, sulla superficie sferica, tra i punti A e B.



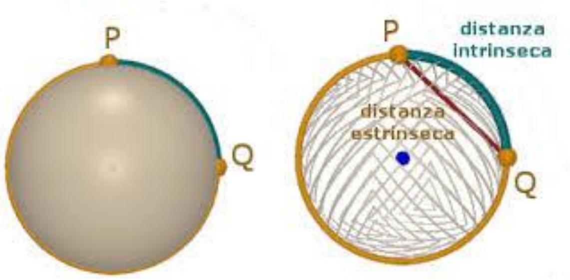


Osservazioni e conclusioni:

Definizione di geodetica: diremo che una linea γ tracciata sulla superficie Σ è una linea geodetica se ogni arco non troppo lungo di γ, i cui estremi siano i punti A e B, è il percorso più breve da A a B tra tutti quelli tracciabili su Σ.
Ci si rende subito conto che le linee geodetiche del piano euclideo sono le rette; ci si rende anche conto che le circonferenze massime sono le geodetiche sulla superficie di una sfera tenendo presente che, sulla sfera, archi non troppo lunghi di circonferenze massime sono necessariamente archi minori.
Grazie a questo esperimento abbiamo capito che non è possibile far aderire la nostra strisciolina lungo percorsi che non siano archi geodetici, ad esempio lungo circonferenze minori.

<u>Esercizio per casa:</u>

I punti P e Q della figura seguente, hanno, sulla superficie della sfera, una distanza pari a un quarto di circonferenza massima. Se si assume che la sfera abbia raggio unitario calcolare la distanza intrinseca di P da Q (cioè la distanza sulla superficie della sfera) e la distanza estrinseca di P da Q (cioè la distanza nello spazio ordinario tridimensionale)



Svolgimento:

raggio:1
d(intrinseca)p,q: ¼ circonferenza
d(estrinseca)p,q:?

circonferenza: $2\pi r = 2*3{,}14=6{,}28$
d(intrinseca): 6,28/4=1,57
d(estrinseca): ipotenusa del triangolo POQ: $\sqrt{r^2 r^2}=\sqrt{2}=1{,}41$

Lezione 2:

ESPERIMENTO 3:

Titolo: triangoli sferici

Obiettivo: costruire un triangolo sferico

Materiali:

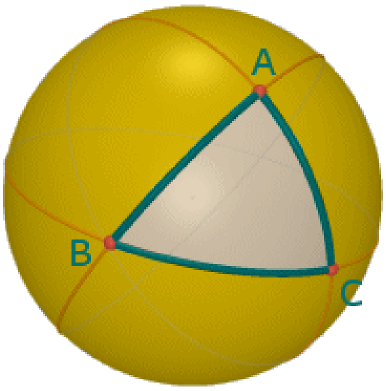
- sfera in polistirolo
- elastici
- spilli

Metodologia

abbiamo applicato un elastico in modo da formare un triangolo rettangolo. Nella figura a fianco vediamo un triangolo sferico: i suoi tre lati sono naturalmente segmenti della sfera, cioè **archi geodetici**.

Osservazioni e conclusioni

Da un punto di vista intrinseco dovremmo parlare semplicemente di triangolo. Cerchiamo di definire più precisamente un triangolo sferico. Nel piano euclideo tre punti non allineati individuano uno e un sol triangolo: basta collegare coppie di punti con un segmento.



Su una sfera due punti non antipodali possono essere collegati con due diversi segmenti (un arco minore e un arco maggiore di circonferenza massima).
Stabiliamo allora di considerare solo **archi minori**. C'è poi da osservare che tre archi minori, non disposti (a due a due) sulla stessa circonferenza massima e aventi a coppie un estremo in comune, delimitano **due regioni** sulla sfera. Chiamiamo allora *triangolo sferico* quella regione, delle due, che ha area minore. In tal modo tre archi minori individuano un'unica regione triangolare che ha sempre area minore della superficie di una semisfera. Nella figura a fianco vedete rispettivamente in grigio e in giallo le due regioni delimitate da tre archi minori: il triangolo sferico ABC è allora quello grigio.
Applicando striscioline su un pallone è molto facile costruire dei triangoli sferici, avendo la certezza che i lati siano archi geodetici

Lezione 3:

ESPERIMENTO 4:

Titolo: Dalla retta all'elica

Obiettivo:creare un'elica grazie a 5 linee rette

Strumenti:

- pennarello indelebile (in alternativa correttore a nastro)
- foglio trasparente (lucido)

Metodologia:

Tracciamo su un foglio trasparente, alcune rette con inclinazione diversa come nella figura a fianco. Arrotoliamo poi il lucido in direzione orizzontale in modo che il foglio si sovrapponga più volte a se stesso. Otterremo, come è chiaro, un cilindro (senza basi).
Arrotolando il cilindro possiamo notare che le rette r1, r2, r3, r4 e r5, linee rette sulla superficie, sono linee curve sulla superficie di un cilindro.

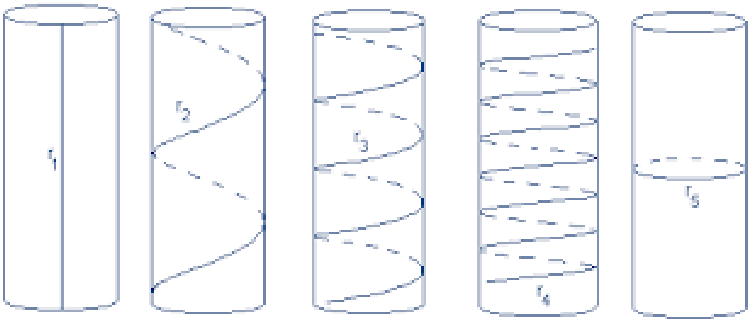
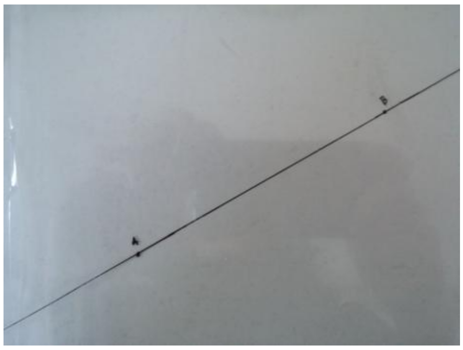


Fig. 2

Osservazioni e conclusioni:
Tutte le linee ottenute sono linee geodetiche: tenendo infatti presente che si passa dal piano (foglio) al cilindro(foglio arrotolato) operando una flessione senza dilatazione. Ciò significa che la distanza tra due punti A e B presi su una retta del foglio rimane invariata quando la retta si arrotola sul cilindro (fatta eccezione per il caso della rettar5che si arrotola su stessa). Si intuisce quindi che le geodetiche sul foglio si trasformano in geodetiche sul cilindro.

ESPERIMENTO 5:

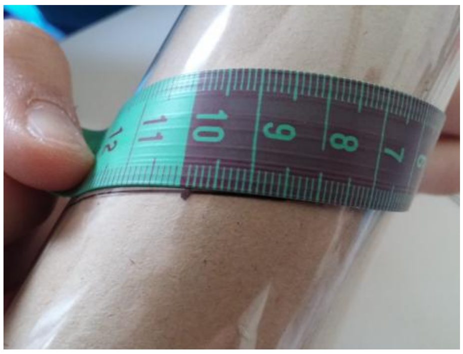


Titolo: I percorsi più brevi sulla superficie cilindrica

Obiettivo: dimostrare che il passaggio dal piano (foglio) al cilindro (foglio arrotolato) implica una flessione, ma non una dilatazione.

Materiali e strumenti:
- foglio trasparente (lucido)
- pennarello indelebile
- metro da sarta
- cilindro in cartone

Metodologia:
Disegniamo su un foglio trasparente due punti A e B appartenenti ad una retta.
Se si passa dal piano(foglio) al cilindro(foglio arrotolato) la figura mostra che una flessione del foglio conserva la distanza tra due punti, misurando la distanza tra i due punti sulla superficie(distanza intrinseca)e non nello spazio.



Osservazioni e conclusioni:
Tutte le linee ottenute sono linee geodetiche: tenete infatti presente che si passa dal piano (foglio) al cilindro (foglio arrotolato) operando una flessione **senza dilatazione**. Cio' significa che la distanza tra due punti A e B presi su una retta del foglio rimane invariata quando la retta si arrotola sul cilindro. Si intuisce quindi che le geodetiche sul foglio si trasformano in geodetiche sul cilindro.

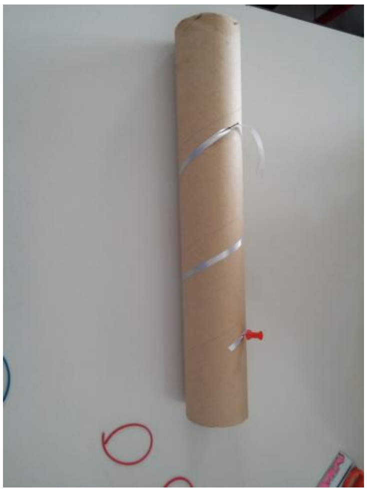
ESPERIMENTO 6:

Titolo: confronto tra geodetiche per due punti

Obiettivo: confrontare due geodetriche

Materiale:

- cilindro in cartone
- nastro per pacchi natalizi



Metodologia:

Arrotoliamo un nastro su un cilindro così da formare una geodetrica sulla quale disegniamo due punti A e B per i quali passino due archi di linee geodetiche; evidenziamo l'arco più breve (sulla prima geodetica) con un tratteggio rosso; applichiamo la seconda striscia: osserviamo l'arco sulla seconda geodetica, partendo da P, passiamo dietro al cilindro e raggiunge Q. E' chiaro che il percorso più breve tra P e Q è il primo arco (su questo si disporrebbe l'elastico).

Osservazioni e conclusioni:

La cosa da capire è allora questa: i due punti P e Q staccano un arco che possiamo considerare non troppo lungo sulla prima geodetica ma non sulla seconda. Si può inoltre osservare che per P e Q passano infinite geodetiche ma per nessuna di esse, eccetto per la prima indicata, l'arco PQ può considerarsi non troppo lungo.