http://users.libero.it/prof.lazzarini/geometria_sulla_sfera/modelli_noneu_start.htm

modelli per
la geometria
non euclidea

p.lazzarini@tin.it

I PERCORSI PIU' BREVI

Realizzeremo alcuni **semplici esperimenti** utilizzando oggetti facilmente reperibili in ogni casa (una lastra di polistirolo, un tubo di cartone, una ciambella per bambini, una sfera di polistirolo, ecc.) e materiali poveri (cartoncino, nastri, elastici, colla, spilli). Sono esperimenti che ci consentono di intuire nozioni profonde, spesso molto difficili da abbordare sul piano del formalismo matematico.

Chiunque si avvicini allo studio della geometria non euclidea dal punto di vista della geometria differenziale dovrebbe realizzarli concretamente. Tutte le nozioni e i concetti che interverranno in questa breve relazione sono ampiamente illustrati, a un livello elementare, nell'ipertesto La geometria sulla sfera.

Proprietà 1 *Comunque presi due punti P e Q su una retta r, il segmento PQ di r è il percorso* ***più breve*** *da P a Q tra tutti i percorsi possibili.*

Esperimento1: ***I percorsi più brevi sulla superficie piana***

Mettete in tensione un elastico, fissandolo con due spilli (punti A e B) su una lastra di polistirolo. Come si dispone? *(foto)*

L'elastico si dispone su un percorso minimo, cioè un segmento (AB) di retta.

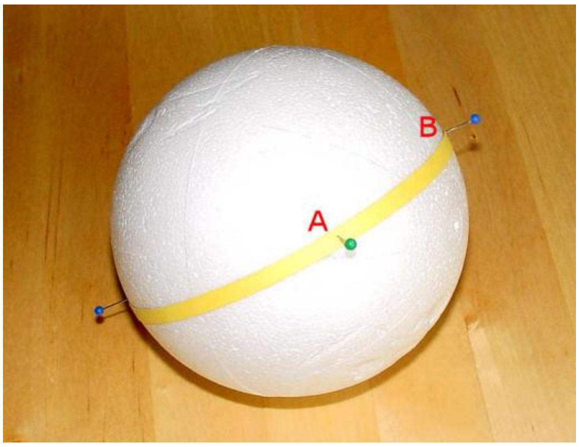
Senza toccare gli spilli, provate a spostare l'elastico lungo il piano (fissatelo momentaneamente con un terzo spillo, punto C) e poi lasciatelo andare. Cosa succede? *(foto)*

Dopo qualche oscillazione riassume lo stato di minima tensione. Provate a spiegare da un punto di vista geometrico perché questa posizione è quella di minima distanza tra A e B.

- Passiamo ora a considerare la superficie di una sfera. La nostra ipotesi è che le circonferenze massime abbiano lo stesso ruolo delle rette nel piano. Dovremmo allora verificare che esse ci forniscono il percorso più breve tra due punti di S^2.

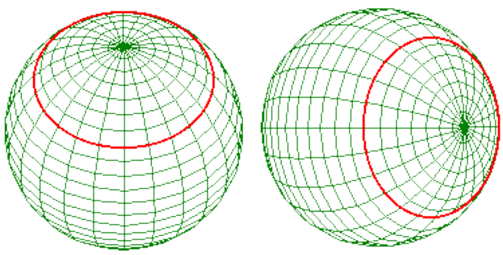
Esperimento2: ***I percorsi più brevi sulla superficie sferica***

Ritagliate una strisciolina rettilinea di cartoncino flessibile (lunga e stretta, ad es. di 0.5 cm x 30 cm) e applicatela su una palla di polistirolo (vedi fig1 sotto).Oppure potete incollare un nastro per pacchi natalizi. *(foto)*



La strisciolina aderisce alla palla lungo archi geodetici, cioè lungo archi di circonferenza massima.

E' importante capire che non è possibile far aderire la nostra strisciolina lungo percorsi **che non siano archi geodetici**, ad esempio lungo circonferenze minori (vedi fig2 seguente).



Provate a farlo, vi renderete conto che è impossibile. *(foto)*

Mettete ora in leggera tensione un elastico, fissandolo con due spilli (punti A e B non antipodali) su una sfera di polistirolo. Come si dispone? *(foto)*

L'elastico si dispone lungo un arco di circonferenza massima. Per verificarlo basta fissarlo su due punti del nastro natalizio precedentemente incollato (fig1 precedente). *(foto)*

Senza toccare gli spilli, provate a spostare l'elastico facendolo rimanere sulla superficie sferica (fissatelo momentaneamente con un terzo spillo, punto C) e poi lasciatelo andare. Cosa succede? *(foto)*

Si ridisporrà sulla circonferenza massima.

Possiamo allora concludere che l'arco minore AB di circonferenza massima è il percorso più breve, sulla superficie sferica, tra i punti A e B.

<u>Differenza con le rette euclidee</u>:

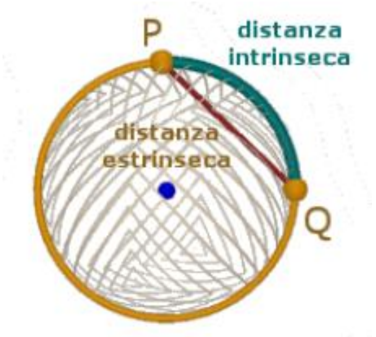
Se i punti A e B fossero antipodali avremmo infiniti percorsi minimi (tutte le semicirconferenze massime per A e B). Se tuttavia ci limitiamo a considerare punti non antipodali il problema non si pone: il percorso minimo è unico ed è l'arco minore dell'unica circonferenza massima per A e B.

- Una volta determinato il percorso minimo tra due punti sulla superficie sferica abbiamo anche introdotto una **nozione intrinseca di distanza** tra due punti: è la lunghezza dell'arco minore di circonferenza massima che collega A con B; se i due punti fossero antipodali assumeremo come loro distanza la lunghezza di una semicirconferenza massima.
- Che i punti antipodali costituiscano una situazione eccezionale lo possiamo capire anche riflettendo sul fatto che la distanza tra due punti qualsiasi P e Q di S^2, assumendo una sfera unitaria (cioè con r=1), è sempre minore o uguale a π. Distanza(P,Q) $\leq \pi$. La distanza è uguale a π solo se i punti sono antipodali. I punti antipodali sono i punti più lontani possibile.

Proprietà 2: *Comunque presi due punti non antipodali P e Q su una circonferenza massima γ, l'**arco minore** PQ di γ è il percorso **più breve** da P a Q tra tutti quelli possibili sulla superficie della sfera*.

Esercizio per casa:

I punti P e Q della figura seguente, hanno, sulla superficie della sfera, una distanza pari a un quarto di circonferenza massima. Se si assume che la sfera abbia raggio unitario calcolare la distanza intrinseca di P da Q (cioè la distanza sulla superficie della sfera) e la distanza estrinseca di P da Q (cioè la distanza nello spazio ordinario tridimensionale)



OSSERVAZIONE: Per noi che vogliamo studiare la geometria su S^2, cioè la geometria intrinseca di S^2, distanza significa naturalmente distanza intrinseca.

Per comprendere meglio i concetti vi consiglio lo studio dei paragrafi 6 e 7 dell'ipertesto <u>La geometria sulla sfera</u>.