

- Le regole del gioco

La prima cosa da dire del nostro sistema formale, il sistema *MIU*, è che esso utilizza soltanto tre lettere dell'alfabeto: M, I, U. Ciò significa che sono stringhe del sistema *MIU* unicamente quelle in cui compaiono solo queste tre lettere. Ecco alcune stringhe del sistema *MIU*:

MU
UIM
MUUMUU
UIIUMIUUIMUIIUMIUUIMUIIU

Ma, sebbene tutte queste stringhe siano legittime, non sono stringhe "in nostro possesso". In effetti, l'unica stringa finora in nostro possesso è MI. Solo utilizzando le regole che ora introdurrò potremo ingrandire la nostra collezione privata. Ecco la prima regola:

REGOLA I: Se si possiede una stringa che termina con una I, si può aggiungere una U alla fine.

A proposito, qualora non sia già chiaro, vorrei precisare che nella nozione di "stringa" è implicito che le lettere compaiono in un ben determinato ordine. Per esempio, *MI* e *IM* sono due stringhe diverse. Una stringa di simboli non è semplicemente un "paniere" di simboli nel quale l'ordine non conta.

Ecco la seconda regola:

REGOLA II: Si abbia *Mx*. Allora si può includere *Mxx* nella collezione.

Qui di seguito viene illustrato con alcuni esempi ciò che si intende dire con questa regola.

Da *MIU* si può ottenere *MIUIU*.
Da *MUM* si può ottenere *MUMUM*.
Da *MU* si può ottenere *MUU*.

La lettera '*x*' nella regola sta dunque ad indicare una qualsiasi stringa; ma una volta deciso quale stringa stia ad indicare, occorre attenersi alla scelta fatta (fin quando non si faccia nuovamente uso della regola: a quel punto si può fare una nuova scelta). Si osservi il terzo esempio sopra citato. Esso mostra come, una volta in possesso di *MU*, si possa includere un'altra stringa nella collezione; ma prima bisogna ottenere *MU*! Vorrei aggiungere un'ultima osservazione a proposito della lettera '*x*': essa non fa parte del sistema formale, non ha lo stesso statuto delle tre lettere '*M*', '*I*' e '*U*'. Tuttavia è utile poter in qualche modo parlare simbolicamente e in generale delle stringhe del sistema. Questa è la funzione di quella '*x*': indicare una stringa arbitraria. Se mai dovesse capitare di includere nella "collezione" una stringa contenente una '*x*', si commetterebbe uno sbaglio, perché le stringhe del sistema *MIU* non contengono mai delle "*x*"!

Ecco la terza regola:

REGOLA III: Se in una delle stringhe della collezione c'è *III*, si può costruire una nuova stringa mettendo una *U* al posto di *III*.

Esempi:

A partire da *UMIIIMU*, si può costruire *UMUMU*.
A partire da *MIIII*, si può costruire *MIU* (e anche *MUI*).
A partire da *IIMII*, non si può costruire niente di nuovo usando questa regola.

Non si pensi assolutamente di poter adoperare questa regola all'indietro, come nel seguente esempio:

Da MU costruire MIII. \Leftarrow Questo è sbagliato.

Le regole funzionano a senso unico.

Ecco l'ultima regola:

Regola IV: Se all'interno di una delle stringhe della collezione c'è UU, si può eliminarlo.

Da UUU si ottiene U.

Da MUUUUU si ottiene MUUU.

- Il quesito

E' data la stringa MI. A partire da essa ricava la stringa MUIIU, mediante 4 le regole indicate.

- Una risoluzione

L'ultima nozione che voglio introdurre a questo punto è quella di *derivazione*. Ecco una derivazione del teorema MUIIU:

(1)	MI	assioma
(2)	MII	da (1) con la regola II
(3)	MIII	da (2) con la regola II
(4)	MIIIIU	da (3) con la regola I
(5)	MUIU	da (4) con la regola III
(6)	MUIUUUU	da (5) con la regola II
(7)	MUIIU	da (6) con la regola IV

- L'interpretazione del gioco

Teoremi, assiomi, regole

La soluzione del gioco MU verrà da me fornita più avanti. Per ora, ciò che importa non è trovare la soluzione, ma cercarla. Probabilmente a questo punto i lettori avranno fatto qualche tentativo per produrre MU. Così facendo, si saranno costruiti una loro collezione privata di stringhe. Stringhe del genere, ottenibili in base alle regole, si chiamano *teoremi*. L'uso corrente che si fa in matematica del termine "teorema" è naturalmente del tutto diverso da quello che ne faremo qui. In matematica, un teorema è un enunciato del linguaggio comune la cui verità è stata dimostrata con una rigorosa argomentazione, come il Teorema di Zenone sull'"Unesistenza" del moto, o il Teorema di Euclide che stabilisce l'esistenza di un'infinità di numeri primi. Ma nei sistemi formali non occorre vedere necessariamente i teoremi come enunciati: essi sono semplicemente stringhe di simboli. E invece di essere *dimostrati*, i teoremi vengono semplicemente *prodotti*, come se uscissero da una macchina, in base a certe regole tipografiche. Per mettere in rilievo questa importante distinzione tra i significati della parola "teorema", in questo libro adotterò la seguente convenzione: se "teorema" appare con l'iniziale maiuscola, il suo significato sarà quello solito: un Teorema è un enunciato, fatto nel linguaggio comune, di cui qualcuno ha dimostrato la verità, servendosi di qualche tipo di argomentazione logica. Se non inizia con la lettera maiuscola, "teorema" avrà il suo significato tecnico: una stringa producibile in un qualche sistema formale. In questa terminologia, il gioco MU consiste nel domandarsi se MU è o non è un teorema del sistema MIU.

Ho fornito gratis un teorema iniziale, e precisamente MI. Un teorema "gratuito" del genere si chiama *assioma*; ancora una volta, il significato tecnico è completamente diverso da quello usuale. Un sistema formale può avere nessun assioma, un solo assioma, più di un assioma, o addirittura un'infinità di assiomi. Nel corso del libro verranno dati esempi di tutti questi tipi di sistema formale.

Ogni sistema formale ha regole per la manipolazione dei simboli, come le quattro regole del sistema MIU. Queste regole si chiamano *produzioni*, o *regole di inferenza*. Userò entrambi i termini.

La derivazione di un teorema è una descrizione esplicita, riga per riga, di come quel teorema si possa produrre in virtù delle regole del sistema formale. Il concetto di derivazione si modella su quello di dimostrazione, ma la derivazione è una versione frugale della dimostrazione. Suonerebbe strano se si dicesse di aver *dimostrato* MUIIU, ma non suona altrettanto strano dire di aver *derivato* MUIIU.